9 класс

ГЕОМЕТРИЯ

ФГОС

УМК

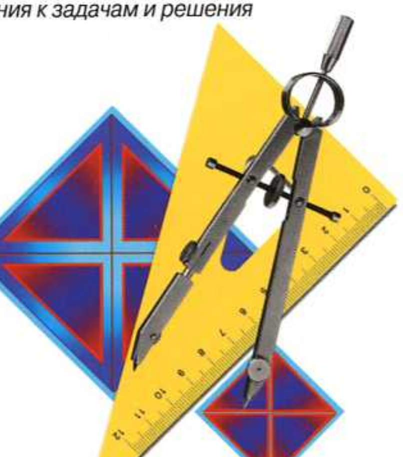
Т. М. Мищенко

Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии

К учебнику Л. С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9 классы»

- *Методы решения задач*
- *Тематическое планирование уроков*
- *Объяснение сложных тем*
- *Контрольные и самостоятельные работы*
- *Указания к задачам и решения*

9 класс



ЭКЗАМЕН

Учебно-методический комплект

Т. М. Мищенко

Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии

К учебнику Л. С. Атанасяна и др.
«Геометрия. 7–9 классы» (М. : Просвещение)

9 класс

Методы решения задач
Тематическое планирование уроков
Объяснение сложных тем
Контрольные и самостоятельные работы
Указания к задачам и решения

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА • 2017

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
М71

Мищенко Т. М.

М71 Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 9 класс: к учебнику Л. С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т. М. Мищенко. — М. : Издательство «Экзамен», 2017. — 142, [2] с. (Серия «Учебно-методический комплект»)

ISBN 978-5-377-09643-6

Данное пособие полностью соответствует федеральному государственному образовательному стандарту (второго поколения).

Предлагаемые дидактические материалы и методические рекомендации призваны помочь учителю, работающему по учебнику Л. С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9 классы».

Использование рекомендаций методического пособия в учебном процессе позволит осуществить: во-первых, достижение каждым учеником уровня обязательной геометрической подготовки, и, во-вторых, сформировать у учащнхся умение применять полученные знания как в стандартных ситуациях, так и в несколько отличных от обязательного уровня.

В пособии по *каждой главе* дается общая характеристика ее содержания, места и роли в курсе, методических особенностей ее изучения; контрольная работа.

По *каждому параграфу* дается комментарий для учителя, включающий общую характеристику содержания параграфа, требования к знаниям и умениям учащихся; методические рекомендации к изучению материала для учителя; примерное планирование изучения материала параграфа; указания к решению задач из учебного пособия; вопросы для повторения теоретического материала параграфа; дополнительные задачи.

Приказом Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

Подписано в печать 31.05.2016. Формат 60x90/16. Гарнитура «Школьная».
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 5,46. Усл. печ. л. 9. Тираж 10 000 экз. Заказ № 0846/16.

ISBN 978-5-377-09643-6

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга предназначена учителю, работающему в девятых классах по учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия, 7–9» (М., Просвещение, 2013). В книге даны рекомендации, разработанные в соответствии с концепцией построения учебника и позволяющие учителю сориентироваться как в методических особенностях изложения учебного материала, так и в требованиях, предъявляемых федеральной программой к геометрической подготовке учащихся.

Использование рекомендаций методического пособия в учебном процессе позволит осуществить: во-первых, достижение каждым учеником уровня обязательной геометрической подготовки и, во-вторых, сформировать у школьников умение применять полученные знания как в стандартных ситуациях, так и в несколько отличных от обязательного уровня.

Основными особенностями авторского подхода к изложению учебного материала являются: опора на наглядность, снижение уровня строгости логических рассуждений при обосновании утверждений, очевидных с точки зрения учащихся.

Такой подход в девятом классе, как и в восьмом, позволяет часть теорем рекомендовать для самостоятельного изучения учащимися с последующим обсуждением. При этом на таких уроках при оценке ответов учащихся важнее оценивать не столько правильность ответа, сколько стремление обосновывать и доказывать учеником высказанное им утверждение. Такой подход будет способствовать развитию культуры мышления. Отсюда следует, что большую часть уроков следует проводить в форме бесед, во время которых обсуждать доказанные и доказываемые теоремы и решения задач.

В учебнике задачам отводится чрезвычайно важная роль. Некоторые из них содержат интересные геометрические факты и служат дополнением к теоретическому материалу учебного пособия. Другие в определенном смысле можно считать задачами базового уровня подготовки, а умение решать их обязательным для всех учащихся. Третьи являются задачами повышенного уровня.

Определенную сложность для учителя представляет необходимость взвешенного сочетания при решении задач письменных и устных форм работы. Письменные формы работы являются важнейшим видом деятельности, формирующим устойчивые навыки в проведении логических рассуждений при решении задач. Форма записи условия задачи, разумные, естественные и исторически сложившиеся сокращения и обозначения при вычислениях и доказательствах дисциплинируют мышление. Вместе с тем заметим, что увлечение письменными видами работы на уроках и дома приводит к большим и не всегда оправданным затратам времени и тормозит развитие устной геометрической речи.

Планирование учебного материала рассчитано на *пять* часов математики в неделю, из которых два часа отводятся на изучение геометрии.

Основное назначение данной книги — помочь учителю в организации учебной деятельности школьников. В ней даются:

по каждой главе — общая характеристика ее содержания, места и роли в курсе, контрольная работа;

по каждому параграфу — комментарий для учителя, включающий, если необходимо, общую характеристику содержания и требования к знаниям и умениям учащихся; методические рекомендации к изучению материала с разбивкой по отдельным вопросам; примерное планирование изучения материала параграфа; указания к решению задач из учебного пособия; дополнительные задачи.

«Методические рекомендации к изучению материала». *Весь материал данного раздела полностью адресован учителю и только учителю.* Здесь учитель получает некоторую оценочную рекомендацию к изучению материала, в которой расставлены акценты и указаны приоритеты. Все методические рекомендации должны быть адаптированы к конкретному классу, уровню подготовки учащихся. Такая адаптация может привести к уменьшению числа решаемых задач, увеличению числа часов, отводимых на изучение той или иной темы, за счет часов, отводимых на решение задач, или резерва.

В рекомендациях к изложению теоретического материала рассматриваются возможные методические подходы к изложению материала на уроке, рекомендуются упражнения для усвоения и закрепления материала. Для некоторых наиболее сложных теорем даются примерные планы проведения их доказательств. Новый материал будет лучше усваиваться учащимися, если они под руководством учителя сделают краткие записи в тетрадях.

В большинстве случаев достаточно записать план доказательства или узловые моменты доказательства. Целесообразно сопроводить и доказательства теорем, и определения, и решения задач чертежами.

Учитывая наличие рабочих тетрадей к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9», в методических рекомендациях указываются места их применения и даются рекомендации по их использованию.[1]

Привлечение наглядных представлений не только не противоречит основному принципу построения курса, но является его методической особенностью.

«Примерное планирование изучения материала». Задачи к каждому уроку выделены по принципу их соответствия содержанию изучаемого на данном уроке теоретического материала. Поэтому кроме задач, указанных в разделе «Методические рекомендации к изучению материала», включены задачи, которые лучше решить с классом не в процессе объяснения нового материала, а в процессе его закрепления. Одна из задач этапа первичного закрепления в процессе изучения темы состоит в том, чтобы научить школьников решать новые задачи, применяя только что полученные сведения, новый аппарат. Как правило, именно эти задачи дублируются задачами домашнего задания.

При распределении учебного времени на изучение каждой темы последний урок отводится: на систематизацию и обобщение знаний по данной теме, один урок на контрольную работу и заключительный урок для разбора ошибок контрольной работы и подведения итогов. На уроках систематизации и обобщения знаний рекомендуется решить те задачи, которые не были решены в процессе изучения темы, и провести подготовку к контрольной работе.

В рубрике **«Указания к задачам»** приведены схемы решения основных (опорных задач) и решения наиболее трудных задач.

«Дополнительные задачи» образуют некоторый резерв для учителя. Одни из них должны помочь при закреплении нового материала, другие — подвести учащихся к решению задач из учебника, третьи могут быть использованы для индивидуальных заданий.

---

[1] Рабочая тетрадь по геометрии: К учебнику Л.С. Атанасяна и др.: 9 класс / Т.М. Мищенко. — М.: «Издательство Экзамен», 2016.

Целью самостоятельных и контрольных работ является проверка усвоения учащимися основного материала изученной темы (иногда части темы). При этом результаты проверки самостоятельных и контрольных работ позволяют зафиксировать не только достижение или недостижение учащимися базового уровня подготовки, но также достижение повышенного уровня. В работах проверяются следующие умения: понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой; делать чертежи, сопровождающие условие задачи, выделять на чертеже необходимую при решении задачи конфигурацию.

Значительную помощь учителю в организации учебного процесса могут оказать рабочие тетради издательства «Экзамен»: «Геометрия–7», «Геометрия–8», «Геометрия–9», (Т.М. Мищенко).

В процессе работы над книгой была использована следующая литература:

1. *Л.С. Атанасян* и др. Геометрия. 7–9 классы. — М.: Просвещение, 2013.

2. *А.В. Погорелов.* Геометрия. 7–9 классы. — М.: Просвещение, 2013.

3. *И. Ф. Шарыгин.* Геометрия. 7–9 кл. — М.: Дрофа, 2013.

4. Примерные программы основного общего образования. Стандарты второго поколения. Математика. — М.: Просвещение, 2000.

5. *Т.М. Мищенко.* Геометрия. Планируемые результаты. Система заданий. 7–9 классы: пособие для учителей общеобразовательных организаций / под ред. Г.С. Ковалевой, О.Б. Логиновой. — М.: Просвещение, 2014.

6. *Л.В. Кузнецова* и др. Планируемые результаты. Система заданий. Математика 5–6 классы. Алгебра 7–9 классы: пособие для учителей общеобразовательных организаций / под ред. Г.С. Ковалевой, О.Б. Логиновой. — М.: Просвещение, 2013.

ГЛАВА X

Метод координат (8 ч.)

Учебный материал темы «Метод координат» многие годы традиционный для курса геометрии, в определенном смысле дублирует аналогичный материал курса алгебры. Содержание темы «Метод координат» в данном курсе ограничено знакомством учащихся с координатным методом, который позволяет многие геометрические задачи перевести на язык алгебраических формул и уравнений. Задание системы координат определяет положение точки на плоскости парой чисел (координатами), что в свою очередь определяет положение фигур (прямых, окружностей) соответствующими уравнениями, которым удовлетворяют координаты точек этих фигур. Важным этапом применения этого метода является удобное задание осей координат.

Требование к уровню усвоения темы «Метод координат. Планируемые результаты обучения основного общего образования» формулируют следующим образом: «*Выпускник получит возможность овладеть координатным методом решения задач на вычисления и доказательства*». Значит, тема должна быть изложена на уроке, однако как организовать контроль за усвоением данной темы и в каком объеме требовать от учащихся воспроизведения учебного материала, решать учителю. Основная цель такого урока — познакомить учащихся с примерами применения *координатного метода*: вывода уравнений окружности и прямой. При этом урок, посвященный теме «*координатный метод решения задач*», можно организовать в форме лекции.

Метод координат в рамках данного учебника применяется при изучении тем: «Скалярное произведение векторов». При изучении темы «Простейшие задачи в координатах» следует уделить основное внимание вопросам вывода формул: координат середины отрезка, длины вектора и расстояния между точками. Вопросы, связанные с выводом уравнений прямой и окружности, их взаимного расположения и расположения их на плоскости, полностью дублируются в курсе алгебры, поэтому их можно дать в обзорном виде. На этом уроке за основную форму работы можно принять фронтальную беседу.

Задачный материал в основном направлен на непосредственное закрепление введенных понятий, формул, уравнений. Многие из этих задач решаются чисто аналитически, однако полезно проиллюстрировать их решения на рисунке.

Планируемые итоговые результаты изучения главы X

Учащиеся должны научиться:

— изображать на чертежах и рисунках систему координат, строить точки по координатам, определять знаки координат конкретных точек;

— объяснять понятие *«координаты вектора»*;

— формулировать, иллюстрировать и доказывать лемму о коллинеарных векторах и теорему о разложении векторов по двум неколлинеарным векторам;

— находить координаты равных векторов, координаты суммы и разности векторов, координаты произведения вектора на число, применяя при необходимости сочетательный, переместительный и распределительный законы;

— выводить формулы: для нахождения координат середины отрезка, для вычисления длины вектора, для вычисления длины отрезка;

— составлять уравнения окружности и прямой;

— устанавливать взаимное расположение двух окружностей; параллельность прямых;

— применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- теорему о разложении векторов по двум неколлинеарным векторам;
- правила нахождения координат суммы и разности векторов, произведения вектора на число;
- устанавливать связь между координатами вектора и координатами начала и конца вектора;
- формулы для нахождения координат середины отрезка;
- формулы для вычисления длин отрезков;
- формулы окружности и прямой.

Учащиеся получат возможность научиться :

- *применять при решении задач на вычисления и доказательство координатный метод.*

§1. Координаты вектора (1 ч.)

Комментарий для учителя

В этом параграфе вводятся координаты вектора, которые в отличие от координат точки, однозначно определяющих ее положение, определяют его с точностью до равенства, т.е. задают не единственный вектор, а множество одинаково направленных векторов, имеющих равные абсолютные величины (модули).

Текущие результаты изучения §1. Учащиеся должны научиться:

— изображать на чертежах и рисунках систему координат, строить точки по координатам, определять знаки координат конкретных точек;

— объяснять понятие *«координаты вектора»*;

— формулировать, иллюстрировать и доказывать лемму о коллинеарных векторах и теорему о разложении векторов по двум неколлинеарным векторам;

— находить координаты равных векторов, координаты суммы и разности векторов, координаты произведения вектора на число, применяя при необходимости сочетательный, переместительный и распределительный законы;

— применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- теорему о разложении векторов по двум неколлинеарным векторам;
- правила нахождения координат суммы и разности векторов, произведения вектора на число;
- формулы для нахождения координат середины отрезка;
- формулы для вычисления длин отрезков;
- формулы окружности и прямой.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Доказательства леммы и теоремы достаточно просты и опираются на определение *произведения вектора* на *число* и определение *коллинеарных векторов*. От учащихся воспроизведения доказательства этих утверждений не требуется. Достаточно, чтобы они знали формулировки и понимали, что если даны два *не-*

коллинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то любой вектор $\overline{p}$ можно представить в виде $\overline{p}=x\overline{a}+y\overline{b}$. На закрепление этих фактов можно предложить упражнения: 917 (для векторов $\overline{a}, \overline{d}$ и $\overline{e}$), 919 (для векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{e}$) и 920 в) и г).

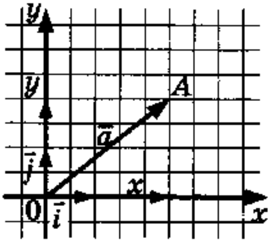


Рис. 1

2°. Вопросы, связанные с введением на плоскости системы декартовых координат, равенства, суммы и разности векторов, умножения вектора на число, знакомы учащимся. Поэтому представляется целесообразным изложение материала пункта 87 провести в форме беседы. Рассмотрим один из возможных вариантов организации такой работы.

1. По рисунку 1 напомнить учащимся понятия *осей координат, начала координат, положительных и отрицательных полуосей*. Ввести координатные векторы $\overline{i}$ и $\overline{j}$. Затем, используя рисунок 1, выполнить на доске упражнение:

Разложите вектор $\overline{a}$ по координатным векторам.

2. Введем понятие «координат вектора».

Так как разностью равных векторов является нулевой вектор, а каждая из координат нулевого вектора равна нулю, то координаты равных векторов равны.

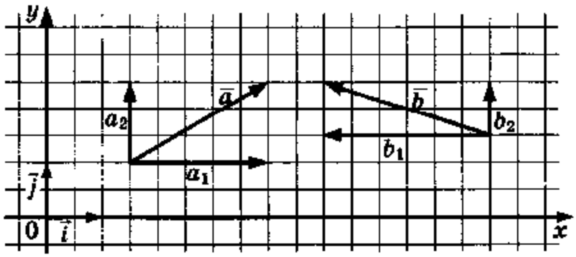


Рис. 2

3. Рассмотрение правил, позволяющих по координатам векторов находить координаты их суммы, разности и произведения вектора на число, полезно проиллюстрировать рисунками 2–5. При этом на рисунке 2 отражено условие: заданы векторы $\overline{a}\{a_1, a_2\}$ и $\overline{b}\{b_1, b_2\}$, на рисунках 3–5 построены сумма $\overline{a}+\overline{b}$, разность $\overline{a}-\overline{b}$ и произведение вектора $\overline{a}$ на число λ.

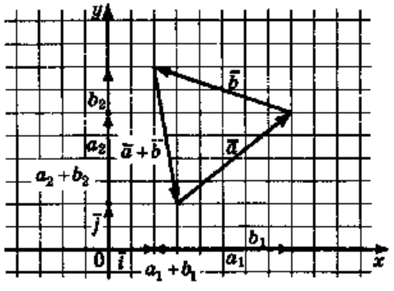


Рис. 3

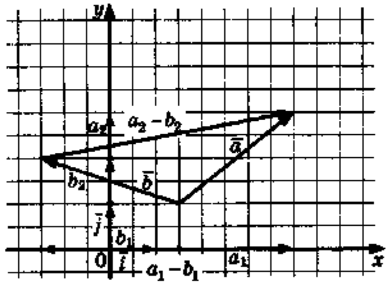


Рис. 4

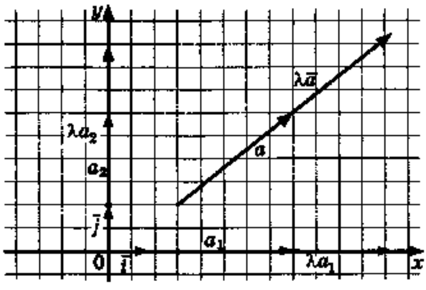


Рис. 5

На закрепление правил, позволяющих по координатам векторов находить координаты их суммы, разности и произведения вектора на число, можно предложить упражнения 922 а) и г), 923 в) и г), 924 (для векторов $3\overline{a}$, и $-3\overline{a}$) и 926 а) и в).

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать определение координат вектора, правила вычисления суммы и разности векторов, а также произведения вектора на число по координатам векторов. Затем выполнить упражнения 1–5.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал параграфа 1; выполнить упражнения 917 (для векторов $\overline{a}, \overline{d}$ и $\overline{e}$), 919 (для векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{e}$), 920 в) и г), 922 а) и г), 923 в) и г), 924 (для векторов $3\overline{a}$ и $-3\overline{a}$) и 926 а) и в); дома — вопросы 1 — 8 из вопросов для повторения к главе X (воспроизведение доказательств леммы, теоремы о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам и утверждение о разложении вектора по координатным векторам от учащихся не требуется); упражнения 917 (для векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$), 918, 919 (для векторов $\overline{d}, \overline{c}$ и $\overline{f}$), 920 а) и б), 922 б) и в), 923 а) и б), 924 (для векторов $2\overline{a}$ и $-\overline{a}$) и 926 б) и г).

§2. Простейшие задачи в координатах (1 ч.)

Комментарий для учителя

В этом параграфе выводятся формулы: для нахождения координат середины отрезка, для вычисления длины вектора, для вычисления длины отрезка. После вывода формул длины вектора и длины отрезка полезно провести небольшое исследование, которое позволит определить, как изменяются абсолютная величина и направление вектора при умножении его на число.

Текущие результаты изучения §1. Учащиеся должны научиться:

— выводить формулы: для нахождения координат середины отрезка, для вычисления длины вектора, для вычисления длины отрезка;

— находить координаты вектора по координатам его начала и конца;

— применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- формулы для нахождения координат середины отрезка;
- формулы для вычисления длин отрезков;
- формулы окружности и прямой.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Введение *радиус-вектора* удобно провести с использованием плаката такого типа, как на рисунке 6, или доски с нанесенной на нее сеткой.

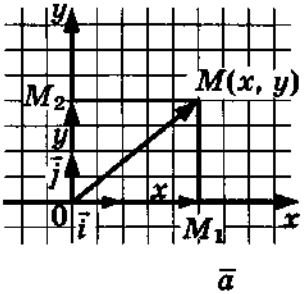


Рис. 6

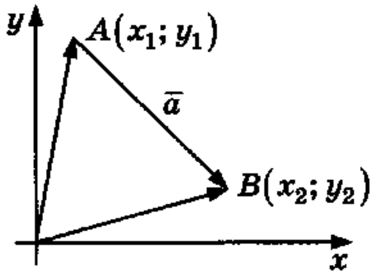


Рис. 7

При введении координат вектора следует использовать либо рисунок 279 из учебника, либо рисунок типа 7, сопровождая объяснение вопросами:

1. Какая точка является началом вектора $\bar{a}$?
2. Какая точка является концом вектора $\bar{a}$?
3. Как вычисляются координаты вектора $\bar{a}$?

В процессе этой работы при обсуждении третьего вопроса полезно записать на доске координаты вектора $\bar{a}$ через координаты его начала и конца и сформулировать правило нахождения координат вектора: «*Для того чтобы найти координаты вектора, нужно из координат его конца вычесть соответствующие координаты его начала*».

2°. Для вывода *формулы координат середины отрезка* потребуется формула $\overline{OC} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB}\right)$, где точка C — середина отрезка AB. Эта формула была получена в пункте 87, поэтому полезно до *вывода формул координат середины отрезка* решить следующие задачи по готовому чертежу:

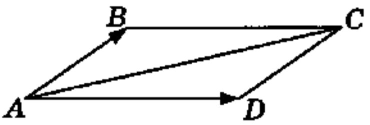


Рис. 8

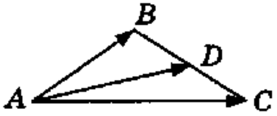


Рис. 9

В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Выразите вектор AC через векторы AB и AD (рис. 8).
В треугольнике ABC проведена медиана AD. Выразите вектор AD через векторы AB и AC (рис. 9).

Вывод формул *координат середины отрезка*, *длины вектора* и *расстояния между точками*, приведенный в учебнике, прост и не требует особых комментариев.

После вывода формул *координат середины отрезка*, на формирование умения <u>*применять*</u> эти <u>*формулы*</u> можно предложить учащимся выполнить упражнения.

1. Найдите координаты середины отрезка AB, если:
а) $A(-6, 2)$, $B(4, 4)$;
б) $A(-5, -4)$, $B(-1, 3)$.
2. Определите координаты центра окружности, диаметром которой является отрезок AB, если $A(4, -2)$ и $B(1, 3)$.
3. В треугольнике OAB проведена медиана OC. Определите координаты точки C, если $A(-5, 0)$, $B(0, -3)$.
4. Дан треугольник ABC с вершинами $A(7, -4)$, $B(-4, 3)$ и $C(5, 0)$. Определите координаты концов средней линии треугольника, параллельной стороне AB.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулы координат середины отрезка, длины вектора по его координатам и длины отрезка по координатам его концов. А затем выполнить упражнения 6–10.

Для закрепления учебного материала параграфа полезно провести устные вычисления. Для этого можно использовать данные таблицы (рис. 10), где точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ — концы вектора $\overline{A_1A_2}\{a_1; a_2\}$, а $|\overline{a}|$ — его модуль, и заполнить пропуски. Следует еще раз подчеркнуть, что координаты векторов с началом в точке $O(0, 0)$ совпадают с координатами их концов.

A_1		A_2		$\overline{A_1A_2} = \overline{a}$		$\lvert\overline{a}\rvert$
x_1	y_1	x_2	y_2	a_1	a_2	
3	2	8	14			
		−7	13	−15	8	
1	−9		12	20		
14		17	2		−4	
		6	8		8	10
		12	27	10		26
0	0	−15	8			

Рис. 10

3°. Ниже предлагается самостоятельная работа по теме «Простейшие задачи в координатах», которую можно провести на следующем уроке, который будет началом темы «Уравнения окружности и прямой». Если на уроках темы «Уравнения окружности и прямой» не хватит времени на ее проведение, то можно провести ее на уроке систематизации темы «Метод координат». В самостоятельной работе первые три задачи — это задачи с выбором ответа или со свободным ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задаче 4 решение записывается полностью с краткой записью условия и выполнением чертежа.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал параграфа 2; дома — вопросы 9–14 из вопросов для повторения к главе X и вопрос 1 из вопросов для повторения к главе VIII; упражнения 929 а), 932, 934 б) и в), 941, 949.

Самостоятельная работа по теме «Простейшие задачи в координатах»

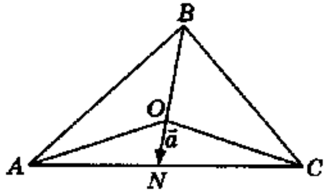
Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

1 вариант

1. Найдите координаты вектора $\overline{c} = 2\overline{a} - \frac{1}{7}\overline{b}$, если $\overline{a}\{-1;\ 2\}$ и $\overline{b}\{14;\ 7\}$.

1. $\{0;\ 3\}$; 2. $\{-4;\ 3\}$; 3. $\{-5;\ 5\}$; 4. $\{-4;\ 5\}$.

Ответ: ________________________



2. В треугольнике ABC точка O является точкой пересечения его медиан. В треугольнике AOC проведена медиана ON. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BN}$, если $\overrightarrow{ON} = a\{-3; -1\}$.

*Ответ:*______________________

3. При каком значении k выполняется равенство $\bar{b} = k\bar{a}$ при условии, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны?

*Ответ:*______________________

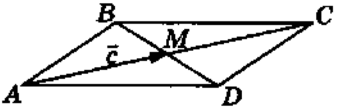
4. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках A (−3, −6), B (8, 3), C (4, 9), D (−7, 0) является параллелограммом.

2 вариант

1. Найдите координаты вектора $\bar{c} = \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$, если $\bar{a}\{-2;\ 1\}$; $\bar{b}\{1; 0\}$.

1. $\{2; 1\}$; 2. $\{1; 5\}$; 3. $\{0; 1\}$; 4. $\{-1; -0{,}5\}$.

*Ответ:*______________________



2. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AC}$, если $\overrightarrow{AM} = \vec{c}\ \{3; 2\}$.

*Ответ:*______________________

3. При каком значении k выполняется равенство $\vec{b} = k\vec{a}$ при условии, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположны?

*Ответ:*______________________

4. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках A (−5; −6), B (−2; 3) и C (10; 9), D (7; 0) является параллелограммом.

§3. Уравнения окружности и прямой (2 ч.)

Комментарий для учителя

Материал этих пунктов в значительной степени знаком учащимся из курса алгебры. В пункте 94 выводится уравнение окружности. Из пункта 21 главы II окружность определяется как фигура, которая состоит из точек, равноудаленных от данной точки. Именно это определение положено в основу вывода уравнения окружности.

Текущие результаты изучения §3. Учащиеся должны научиться:

— составлять уравнения окружности и прямой;

— исследовать взаимное расположение двух окружностей;

— исследовать расположения прямой относительно осей координат, параллельность прямых;

— решать задачи на вывод уравнений окружностей и прямых.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Из курса алгебры учащимся известны уравнения с двумя переменными x и y. При этом все точки, координаты которых x и y удовлетворяют данному уравнению, составляют на плоскости некоторую фигуру. Таким образом, любая точка полученной фигуры имеет координаты, удовлетворяющие данному уравнению, и обратно: любая точка, координаты которой удовлетворяют данному уравнению, является точкой этой фигуры. Проиллюстрировать это утверждение можно решением следующей задачи:

> Найдите все точки плоскости xy, для которых $x = y$.

В пункте 93 отмечено, что задать уравнением с двумя переменными x и y линию — это значит доказать два взаимно обратных утверждения: первое — любая точка линии обладает указанным свойством и второе — любая точка, обладающая этим свойством, является точкой линии.

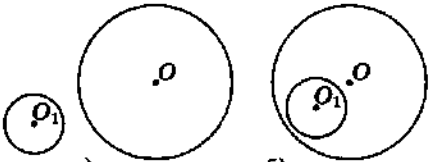
2°. Для того чтобы составить *уравнение окружности с* центром в точке C (x, y) и радиусом r, полезно вспомнить с учащимися, что окружность — это фигура, состоящая из всех точек плоскости, удаленных от точки C на расстояние r.

А для того чтобы доказать, что полученное уравнение является *уравнением* данной *окружности*, нужно убедиться, что любая точка, координаты которой удовлетворяют этому уравнению, принадлежит окружности, т.е. находится на заданном расстоянии от ее центра. Затем следует рассмотреть частные случаи расположения окружности относительно осей координат и вывести *уравнение окружности* при условии, когда одна из координат точки $C(x, y)$ или обе координаты равны нулю.

3°. После вывода *уравнения окружности* полезно провести исследование взаимного расположения двух окружностей по аналогии с исследованием взаимного расположения прямой и окружности (пункт 96):

При каком условии окружности с радиусами R_1 и R_2 и расстоянием между центрами, равном d, пересекаются, не пересекаются и касаются?

Рассмотрение решения задачи можно начать с выдвижения гипотезы о возможных случаях взаимного расположения двух окружностей:



а) б)

Рис. 11

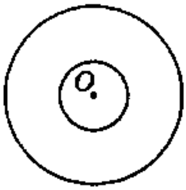
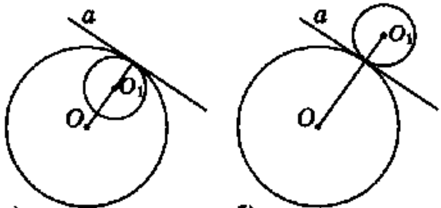


Рис. 12



а) б)

Рис. 13

1. *Две окружности не имеют общих точек* (рис. 11 а, б).

2. *Концентрические окружности — две окружности разных радиусов с общим центром* (рис. 12).

3. *Если две окружности имеют одну общую точку и общую касательную в этой точке, то они касаются. Если центры окружностей лежат по одну сторону от общей касательной, то касание — внутреннее (рис. 13 а). Если центры окружностей лежат по разные стороны от общей касательной, то касание — внешнее* (рис. 13 б).

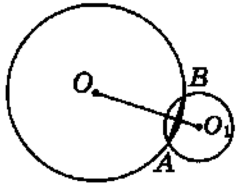


Рис. 14

4. *Две окружности имеют две общие точки* (рис. 14).
При исследовании используется координатный метод: вводится система координат так, чтобы уравнения рассматриваемых фигур имели бы наиболее простой вид; записываются уравнения окружностей, и вопрос об их взаимном расположении сводится к вопросу о существовании и количестве решений системы этих двух уравнений. Введем систему координат следующим образом (рис. 15):

Пусть начало координат (точка O) совпадает с центром окружности радиуса R_1, тогда ее уравнение запишется в виде: $x^2 + y^2 = R_1^2$.

В качестве положительной полуоси x выберем луч с началом в точке O и проходящий через центр окружности с радиусом R_2 (точка O_1).

Координаты точки O_1 будут $(d, 0)$, и уравнение второй окружности запишется в виде: $(x - d)^2 + y^2 = R_2^2$.

Окружности будут иметь столько общих точек, сколько решений имеет система уравнений:

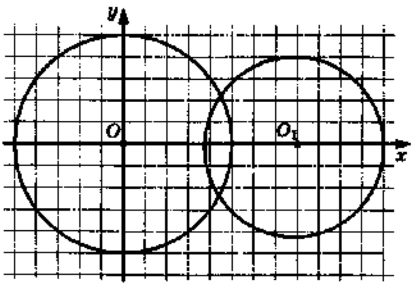


Рис. 15

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R_1^2 \\ (x-d)^2 + y^2 = R_2^2 \end{cases}.$$

В результате решения системы уравнений получаем выражение для y^2:

$$y^2 = \frac{1}{4d^2}(R_1 + R_2 + d)(R_1 + d - R_2)(R_1 + R_2 - d)(R_2 - R_1 + d).$$

Далее исследуем, сколько решений имеет система, и делаем вывод о числе общих точек окружностей.

Если $R_1 + d > R_2$, $R_1 + R_2 > d$, $R_2 + d > R_1$, то правая часть выражения для координаты y положительна и, значит, система имеет два решения. Отсюда окружности пересекаются (см. рис. 14).

Если хотя бы один из сомножителей $R_1 + d - R_2$, $R_1 + R_2 - d$, $R_2 - R_1 + d$ равен нулю, то правая часть выражения для координаты y равна нулю и, значит, система имеет одно решение. Отсюда окружности касаются (см. рис. 13). Причем, если $R_1 + R_2 = d$, то окружности касаются внешним образом (см. рис. 13, б), а если $R_2 + d = R_1$ или $R_1 + d = R_2$, то окружности касаются внутренним образом (см. рис. 13, а).

Если один из сомножителей $R_1 + d - R_2$, $R_1 + R_2 - d$, $R_2 - R_1 + d$ отрицательный, то правая часть выражения для координаты y отрицательна и, значит, система не имеет решений. Отсюда окружности не имеют общих точек (см. рис. 11). Причем, если $d > R_1 + R_2$, то каждая из окружностей расположена вне другой, (см. рис. 11, а), а если $R_1 > R_2 + d$ или $R_2 > R_1 + d$, то одна из окружностей находится внутри другой (см. рис. 11, б). Если же $d = 0$, и $R_1 \neq R_2$, то одна из окружностей находится внутри другой, а их центры совпадают (см. рис. 12).

После проведенного исследования можно сделать вывод: *«если одно из чисел R_1, R_2 и d больше суммы двух других, то окружности не пересекаются; если одно из чисел R_1, R_2 и d равно сумме двух других, то окружности касаются; если каждое из чисел R_1, R_2 и d меньше суммы двух других, то окружности пересекаются в двух точках»*.

3°. Прежде чем приступать к выводу *уравнения прямой*, полезно вспомнить определение серединного перпендикуляра и решить задачу:

> Составьте уравнение для множества точек, равноудаленных от двух данных точек (0; 1) и (1; 2).

Координаты любой точки $M(x; y)$, равноудаленной от точек (0; 1) и (1; 2), удовлетворяют уравнению: $x^2 + (y - 1)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$. Верно и обратное: если координаты точки удовлетворяют полученному уравнению, то она равноудалена от точек (0; 1) и (1; 2).

После вывода уравнения прямой полезно провести исследование: расположения прямой относительно системы координат и взаимного расположения прямой и окружности.

1. Как расположена прямая $ax + by + c = 0$, если в ее уравнении один из коэффициентов равен нулю ($a = 0$, $b = 0$, $c = 0$)?

В результате исследования можно сделать вывод: *«если $a = 0$, $b \neq 0$, то все точки прямой имеют одну и ту же ординату и прямая параллельна оси x или с ней совпадает; если $a \neq 0$, $b = 0$, то все точки прямой имеют одну и ту же абсциссу и прямая параллельна оси y или с ней совпадает; если $c = 0$, то прямая проходит через начало координат».*

2. Как найти координаты точки пересечения двух прямых?

Координаты точки пересечения двух прямых удовлетворяют одновременно уравнениям обеих прямых, т.е. являются решением системы уравнений: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_1 = 0 \end{cases}$.

3. При каком условии окружность радиуса R и прямая, расстояние от которой до центра окружности равно d, не пересекаются, пересекаются, касаются?

В пункте 70 исследовался вопрос о взаимном расположении прямой и окружности в зависимости от соотношения между радиусом R окружности и расстоянием d от центра окружности до прямой. После вывода *уравнений окружности* и *прямой* полезно еще раз провести это исследование с использованием координатного метода и сравнить полученные результаты с выводами из пункта 70.

Введем систему координат следующим образом (рис. 16): начало координат (точка O) совпадает с центром окружности радиуса R. Тогда ее уравнение запишется в виде: $x^2 + y^2 = R^2$. В качестве положительной полуоси x выберем луч с началом в точке O, перпендикулярный данной прямой l и пересекающий ее в точке H. Координаты точки H будут $(d, 0)$, и уравнение прямой l запишется в виде: $x = d$.

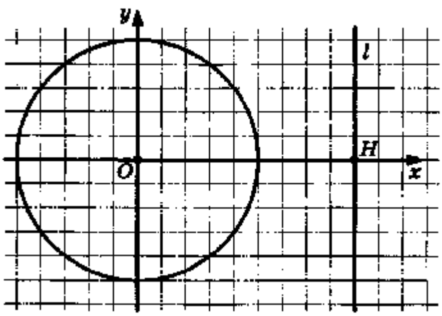
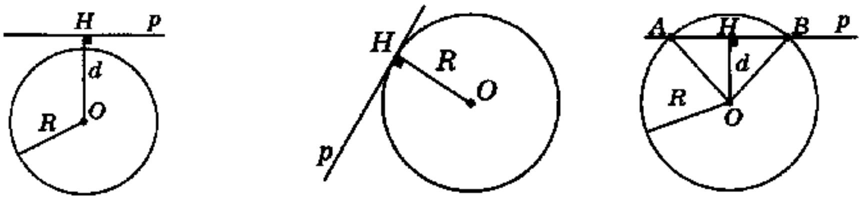


Рис. 16

Окружность и прямая будут иметь столько общих точек, сколько решений имеет система уравнений: $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x=d \end{cases}$. В результате решения системы уравнений получаем выражение для y: $y=\pm\sqrt{R^2-d^2}$



Если $d > R$, то прямая и окружность не имеют общих точек.

Если $d = R$, то прямая и окружность имеют одну общую точку.

Если $d < R$, то прямая и окружность имеют две общие точки.

Рис. 17

После проведенного исследования о числе решений можно сделать вывод о взаимном расположении прямой и окружности (рис. 17): *«если d больше R, то прямая и окружность не пересекаются; если d равно R, то прямая и окружность касаются; если d меньше R, то прямая и окружность пересекаются в двух точках».*

4°. При решении задач, рекомендованных для работы в классе, полезно для экономии времени использовать доску с нанесенной на нее сеткой. В этом случае многие задачи можно решить устно, с указанием на сетке необходимых или искомых точек.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пунктов 93, 94 и взаимное расположение двух окружностей; решить задачи 959 а), в) и д), 961, 965, 966 а) и б), 968 и 969 а); дома — вопросы 15 — 17 и 23 из вопросов для повторения к главе X; задачи 959 б) и г), 962, 966 в) и г), 967 и 969 б).

На втором уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 95 и взаимное расположение прямой и окружности; разобрать по тексту учебника решение задачи 972 а), решить задачи 973, 795, 977 и 799; дома — вопросы 18–22, 24 из вопросов для повторения к главе X; задачи 972 б), 974, 976, 980.

Систематизация и обобщение знаний по теме «Метод координат»

Комментарий для учителя

1°. В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Метод координат» учащиеся должны:

— находить координаты равных векторов, координаты суммы и разности векторов, координаты произведения вектора на число, применяя при необходимости сочетательный, переместительный и распределительный законы;

— составлять уравнения окружности и прямой;

— устанавливать взаимное расположение двух окружностей, прямых, прямых и окружностей;

— находить центры и радиусы окружностей по их уравнениям;

— применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- правила нахождения координат суммы и разности векторов, произведения вектора на число;
- формулы для нахождения координат середины отрезка;
- формулы для вычисления длин отрезков;
- формулы окружности и прямой.

2°. Подготовку к контрольной работе по теме: «Метод координат» полезно организовать как урок решения задач. Для этого можно использовать нерешенные задачи из учебника, в ходе решения которых провести повторение по материалу параграфа. Кроме того, можно подобрать задачи из дополнительных задач методического пособия, рекомендованные к соответствующим пунктам, в зависимости от уровня подготовки класса.

В сборнике тестов Т.М. Мищенко, А.Д. Блинков «Геометрия. Тесты. 9 класс» к учебнику Л.С. Атанасян и др. издательства «Просвещение» для главы VIII «Метод координат» рекомендованы тесты 1–3, направленные на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении данной темы. Каждый тест имеет четыре варианта, и их можно использовать при подготовке к контрольной работе.

Так как тесты не предполагают письменного оформления каждого задания, то можно устно выполнить один из вариантов, при этом полезно разобрать хотя бы одну из десятых задач, решение которой позволяет определить уровень сформированности умения применять изученные теоремы и требует достаточно высокой вычислительной культуры.

3°. При подготовке к итоговой контрольной работе при проведении повторения, используя весь оставшийся резерв времени, следует оставить один урок для разбора решений итоговой работы. Задания для повторения можно брать из учебника, используя либо не решенные в процессе обучения, либо наиболее важные задания каждой темы. Кроме того, учитель может создать свой набор задач для повторения в зависимости от уровня подготовки класса.

4°. В контрольной работе даны четыре задачи, решение которых записывается полностью с выполнением чертежа.

Контрольная работа по теме «Метод координат»

1 вариант

1. Даны векторы $\overline{a}\{-3, 4\}$ и $\overline{b}\{8, 1\}$. Найдите координаты вектора $\overline{a}+2\overline{b}$.

2. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A (2, 2) и параллельной прямой, заданной уравнением $y = 2x$. Изобразите эту прямую.

3. Определите взаимное расположение прямых, заданных уравнениями: $x + y - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$.

4. Составьте уравнение окружности, описанной около треугольника ABC, если заданы координаты его вершин: $A(0, 3)$, $B(4, 0)$, $C(4, 3)$.

2 вариант

1. Даны векторы $\overline{c}\{2, 5\}$ и $\overline{d}\{-3, 8\}$. Найдите координаты вектора $2\overline{c} - \overline{d}$.

2. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A\ (2, 1)$ и перпендикулярной прямой, заданной уравнением $y = x$. Изобразите эту прямую.

3. Составьте уравнение окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, вершины которого имеют координаты: $A(-2, -2)$, $B(6, -2)$, $C(6, 4)$, $D(-2, 4)$.

4. Определите взаимное расположение прямых, заданных уравнениями: $y = 3x$, $x + y - 4 = 0$.

Замечание. На последнем уроке данной темы после контрольной работы рекомендуется задать на дом — вопросы 15–18 из вопросов для повторения к главе VII, задачу 593.

ГЛАВА XI

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов (14 ч.)

В этой главе вводятся определения синуса, косинуса и тангенса для любого угла от 0° до 180°, рассматриваются теоремы косинусов и синусов и еще одна операция над векторами, а именно, *скалярное произведение векторов*. Кроме того, здесь же выводятся формулы для вычисления координат точек с использованием тригонометрических формул. Этот материал является дополнительным, но необходимым для доказательства теоремы косинусов и вывода еще одной формулы площади треугольника.

Тема *«Решение треугольников»* является одной из ведущих тем курса планиметрии. Полученные при ее изучении знания широко применяются при решении большого класса вычислительных задач, при анализе условий задач на построение. Доказанные здесь теоремы *косинусов* и *синусов* позволяют по трем заданным элементам треугольника находить все остальные его элементы. Рассматриваются три типа задач на решение треугольников: I) по данной стороне и двум углам; II) по двум сторонам и углу между ними; III) по трем сторонам. В данном методическом пособии рассматривается еще одна задача на решение треугольников: по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них. Эта задача является задачей повышенной сложности, поэтому ее можно не рассматривать на уроке в общем виде с полным исследованием. Однако если учитель сочтет возможным рассмотреть ее на уроке, то достаточно дать схему решения и перейти к задачам с числовыми данными. Изучение темы позволяет провести обобщающее повторение решения прямоугольных треугольников (8 класс, глава VII, §4) и построения треугольников (7 класс, глава IV, §4). К тому же умение решать произвольный треугольник по трем заданным элементам широко применяется в курсе стереометрии.

Вводимое здесь определение *скалярного произведения векторов* и теорема о *скалярном произведении векторов*, которая формулируется для векторов, заданных координатами, позволяют сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов.

Планируемые итоговые результаты изучения главы XI.

Учащиеся должны научиться:

— выделять на чертеже, данном в условии задачи, конфигурации, необходимые для решения треугольников;

— формулировать, иллюстрировать и доказывать теорему косинусов и теорему синусов;

— формулировать, иллюстрировать и доказывать теорему о площади треугольника: $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$;

— формулировать и объяснять определения *скалярного произведения векторов* и угла между векторами;

— вычислять скалярное произведение векторов, находить угол между векторами, устанавливать перпендикулярность векторов и прямых;

— объяснять определения *синуса, косинуса, тангенса для любого угла от* 0° *до* 180°;

— выводить основное тригонометрическое тождество, формулы приведения, формулы для вычисления координат точки;

— объяснять термин "*решение треугольников*";

— решать треугольники в общем виде;

— вычислять *скалярное произведение векторов*, значение угла между векторами;

— *выводить* основные тригонометрические тождества;

— применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- теоремы косинусов, синусов, соотношения между углами и сторонами треугольника;
- формулу площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$;
- определения синуса, косинуса, тангенса для любого угла от 0° до 180°;
- основное тригонометрическое тождество;
- формулы приведения;
- формулы для вычисления координат точки;
- скалярное произведение векторов и его свойства.

§1. Синус, косинус и тангенс угла (1 ч.)

Комментарий для учителя

Используя координатный метод, здесь вводим определения синуса, косинуса и тангенса для любого угла от $0°$ до $180°$, что в свою очередь позволяет находить координаты точки. Кроме того, здесь же доказывается основное тождество и тождества, связывающие тригонометрические функции углов $0° \le \alpha \le 90°$ с тригонометрическими функциями углов $90° \le \alpha \le 180°$.

Текущие результаты изучения §1. Учащиеся должны научиться:

— оперировать начальными понятиями тригонометрии и выполнять элементарные операции над функциями углов;

— объяснять определения *синуса, косинуса, тангенса для любого угла от* $0°$ *до* $180°$;

— выводить основное тригонометрическое тождество, формулы приведения, формулы для вычисления координат точки;

— применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения синуса, косинуса, тангенса для любого угла от $0°$ до $180°$;
- основное тригонометрическое тождество;
- формулы приведения;
- формулы для вычисления координат точки.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Перед изучением нового материала следует повторить с учащимися определения косинуса, синуса, тангенса острого угла прямоугольного треугольника и, используя рисунок 18, для острого угла α записать значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ через катеты и гипотенузу прямоугольного треугольника OMD.

Заметим, что в данном прямоугольном треугольнике гипотенуза равна единице, а поскольку α — острый угол, то точка M

лежит в первой четверти, имеет положительные абсциссу и ординату, и, значит, длины катетов равны значениям координат, т.е. прилежащий к углу α катет равен x, а противолежащий ему катет равен y, поэтому $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$.

Определения *косинуса, синуса и тангенса любого угла от* 0° *до* 180° вводятся на наглядно-интуитивном уровне. После того как записаны формулы $\cos\alpha = x$ и $\sin\alpha = y$, утверждается, что по этим формулам теперь будет определяться косинус и синус любого угла. Для иллюстрации определения *косинуса и синуса для тупого угла* можно на этом же рисунке провести луч ON (рис. 19), образующий с положительной полуосью x тупой угол (рис. 290 из учебника).

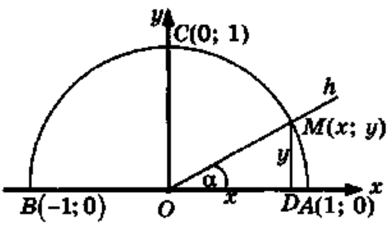


Рис. 18

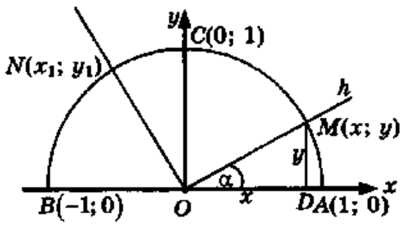


Рис. 19

При введении определения *тангенса любого угла от* 0° *до* 180° полезно обратить внимание учащихся на то, что формула $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ имеет смысл только в том случае, если $x \neq 0$, а это означает, что луч h не совпадает с положительной полуосью y и угол α — не прямой, т.е. $\alpha \neq 90°$. Отсюда следует $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

После введения определений полезно обратить внимание учащихся на то, что формулы $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ верны для угла $0° < \alpha < 180°$ <u>только</u> при условии введения системы координат и задания окружности <u>единичного</u> радиуса. Использование в данной теме единичной окружности позволяет естественным образом определить границы изменения $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ и доказать *основное тригонометрическое тождество*. Здесь же полезно обсудить следующий вопрос:

Как изменятся формулы $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, если радиус окружности не равен единице?

2°. После этого вместе с учащимися можно, используя введенные формулы, найти значения синуса, косинуса и тангенса углов 0°, 90° и 180°.

а) Если луч h совпадает с положительной полуосью x, то точка M лежит на положительной полуоси x, совпадает с точкой A и имеет координаты (1, 0). Вычислим $\sin 0°$, $\cos 0°$ и $\operatorname{tg} 0°$ по введенным выше формулам получаем: $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$ и $\operatorname{tg} 0° = 0$.

б) Если луч h образует с положительной полуосью x угол 90°, то точка M лежит на положительной полуоси y, совпадает с точкой C и имеет координаты (0, 1). Значит, $\sin 90° = 1$ и $\cos 90° = 0°$. Так как на 0 делить нельзя, то для угла 90° тангенс не существует.

в) Если луч h образует с положительной полуосью x угол, равный 180°, то точка M лежит на отрицательной полуоси x, совпадает с точкой B и имеет координаты

(–1, 0). Отсюда $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$ и $\operatorname{tg} 180° = 0$.

3°. Введение формул приведения полезно сопроводить следующими рассуждениями:

Рассмотрим прямоугольные треугольники OM_1D_1, OM_2D_2 и OM_3D_2 (рис. 20). Они равны по гипотенузе н острому углу. Отсюда $OD_1 = OD_2 = OD_3$, $x_1 = y_2 = -x_3$, и $M_1D_1 = M_2D_2 = M_3D_3$, $y_1 = x_2 = y_3$. $\angle M_2OD_1 = 90° - \alpha$, $\angle M_3OD_3 = 180° - \alpha$. Используя введенные формулы, находим: $\cos(90° - \alpha) = x_2$ и $\sin(90° - \alpha) = y_2$; $\cos(180° - \alpha) = x_3$ и $\sin(180° - \alpha) = y_3$; $\cos\alpha = x_1$ и $\sin\alpha = y_1$.

Тем самым можно сделать вывод:

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ и $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$;

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ и $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.

В пункте 69 главы VII были вычислены значения *косинуса, синуса* и *тангенса* углов, равных 30°, 45° и 60°. Теперь полезно вместе с учащимися найти значения *косинуса, синуса* и *тангенса* углов 120°, 135° и 150°.

Вывод формул для вычисления координат точки, данный в учебнике, достаточно прост и не требует специальных разъяснений. Его изучение можно предложить учащимся для самостоятельной работы.

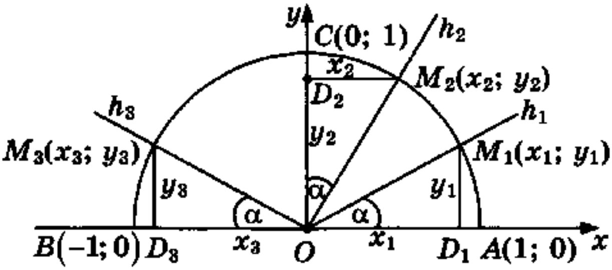


Рис. 20

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировки определений синуса, косинуса и тангенса угла от 0° до 180° и выполнить задание 11. Затем записать основное тригонометрическое тождество, по тексту тетради разобрать решение упражнения 12 и по аналогии выполнить упражнения 13–15. Цель их выполнения — сформировать умения применять введенные определения и формулы.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке: в классе — рассмотреть весь теоретический материал параграфа 1, решить устно задачи 1013 а) и в), 1014 в) и 1015 г), 1016, 1018 а) и в), 1019 а) и в); дома — вопросы 1–7, задачи 1011, 1013 б), 1014 а) и б), 1015 в), 1017 а) и б), 1018 б), г) и д), 1019 б) и г).

§2. Соотношения между сторонами и углами треугольника (5 ч.)

Комментарий для учителя

В параграфе рассматривается традиционный материал для любого курса планиметрии: *теорема синусов*, *теорема косинусов* и решение треугольников.

Текущие результаты изучения §2. Учащиеся должны научиться:

— выделять на чертеже, данном в условии задачи, конфигурации, необходимые для решения треугольников;

— формулировать, иллюстрировать и доказывать теорему косинусов и теорему синусов;

— формулировать, иллюстрировать и доказывать теорему о площади треугольника: $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$;

— объяснять термин *«решение треугольников»*;

— записывать в виде равенств *теоремы синусов* и *косинусов* относительно данного треугольника;

— «решать треугольники» в общем виде;

— применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- теоремы косинусов, синусов, соотношения между углами и сторонами треугольника;
- формулу площади треугольника $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Перед выводом формулы *площади треугольника* $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$ полезно предварительно повторить с учащимися формулу *площади треугольника* $S=\frac{1}{2}ah_a$.

При выводе формулы *площади треугольника* необходимо из формулировки теоремы выделить условие и заключение теоремы и сделать краткую запись (рис. 21).

Дано: $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, $\angle ACB=\gamma$.

Доказать: $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$.

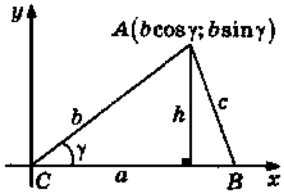


Рис. 21

При доказательстве теоремы используется координатный метод. Эффективность применения этого метода в значительной степени определяется способом задания системы координат; следует обратить внимание учащихся на то, как вводится система координат.

Введем систему координат так, чтобы координаты вершин треугольника имели наиболее простой вид. Для этого в качестве положительной полуоси x выберем луч CB, а направление положительной полуоси y определим так, чтобы точка A имела положительную ординату.

Координаты точки C будут (0, 0), а координаты точки A находим по формулам для вычисления координат: ($b\cos\gamma$, $b\sin\gamma$).

На применение полученной формулы полезно предложить учащимся упражнения 1020 а), 1021 и задачу 1 из дополнительных задач методического пособия.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулу площади треугольника по двум сторонам и углу между ними. На формирование умения применять формулу площади треугольника по двум сторонам и углу между ними можно использовать задачи 16–19. Условие задачи 1021 из учебника сформулировано в задаче 16, а задача 1 из дополнительных задач методического пособия в рабочей тетради дана в задаче 17. После ее решения полезно записать формулу площади параллелограмма по двум смежным сторонам и углу между ними. Эту формулу можно использовать при решении задач.

2°. Доказательство *теоремы синусов* достаточно просто, и его можно провести с активным участием учащихся. Решение задачи 1033 можно предложить учащимся разобрать по тексту учебника дома.

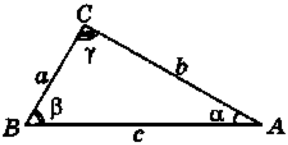


Рис. 22

На формирование умения применять *теорему синусов* полезно обсудить с учащимися следующие вопросы:

1. Даны сторона a и углы β и γ треугольника ABC (рис. 22). Найдите стороны b и c.
2. Даны угол α и стороны a и b треугольника ABC (см. рис. 22). Найдите углы β и γ.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку теоремы синусов. В зависимости от уровня подготовки класса на формирование умения применять теорему синусов можно использовать задачи 20–29. Поскольку теорему синусов и теорему косинусов рекомендуется рассмотреть на одном уроке, то задачи, рекомендованные к теме «Теорема синусов», можно решить после изучения темы «Теорема косинусов».

3°. Как и при выводе формулы *площади треугольника* $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$, при доказательстве *теоремы косинусов* используется координатный метод. Поэтому следует обратить внимание учащихся на то, как вводится в данной теореме система координат.

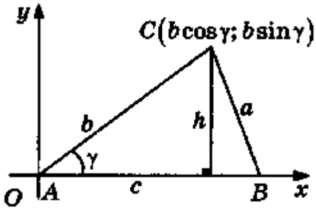
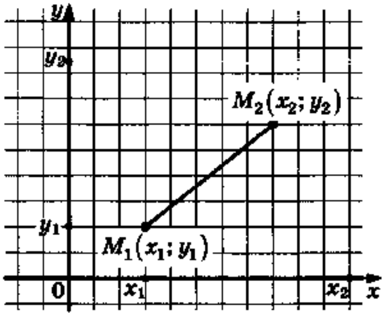


Рис. 23

Введем систему координат так, чтобы точка A имела координаты (0, 0), точка B — координаты (c, 0) и точка C — координаты ($b\sin\gamma$; $b\cos\gamma$) (рис. 23).



$$M_1M_2^{\,2}=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

Рис. 24

В доказательстве *теоремы косинусов* используется ранее введенная формула расстояния между точками. Поэтому перед началом объяснения формулировки и доказательства *теоремы косинусов* целесообразно повторить эту формулу.

При этом полезно рисунок и формулу зафиксировать на доске и сохранять до конца работы над теоремой (рис. 24).

Доказательство *теоремы косинусов* достаточно просто, поэтому его можно провести с активным привлечением учащихся.

На непосредственное применение *теоремы косинусов* можно предложить следующее упражнение.

> В треугольнике ABC: AB = 2 см, AC = 3 см, $\angle BAC$ = 60°. Найдите сторону BC.

Следует обратить внимание учащихся на то, что с помощью теоремы косинусов, зная стороны треугольника, можно найти его углы. Для этого решить задачу 1025 ж) из учебника.

Из теоремы косинусов следует очень важный вывод:

Если с — наибольшая сторона треугольника, то этот треугольник будет остроугольным, прямоугольным или тупоугольным в зависимости от того, будет ли величина $a^2 + b^2 - c^2$ больше нуля, равна нулю или меньше нуля.

Рассмотрим подробнее это утверждение:

1. Если угол γ — острый, то $\cos\gamma > 0$, значит, из $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ следует $c^2 < a^2 + b^2$.

2. Если угол γ — прямой, то $\cos\gamma = 0$, значит, из $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ следует $c^2 = a^2 + b^2$. Следовательно, теорема Пифагора является частным случаем *теоремы косинусов*.

3. Если угол γ — тупой, то $\cos\gamma < 0$, значит, из $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ следует $c^2 > a^2 + b^2$.

На прямое применение этого исследования можно решить задачу 1031.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку* теоремы косинусов. *Рассмотрение вопроса о том, что длина стороны с, лежащей против угла γ, зависит от вида угла γ, можно провести в ходе решения задачи 30. В задаче 33 проводится исследование, аналогичное проведенному выше, и результат его решения позволяет определить вид угла. На прямое применение этого исследования можно решить задачу 34 вместо задачи 1031. В зависимости от уровня подготовки класса на формирование умения применять* теорему косинусов *можно использовать задачи 35–38.*

3°. Перед рассмотрением темы «*Решение треугольников*» следует задать на дом для повторения: решение прямоугольных треугольников (8 класс, глава VII, вопрос 18) и построение треугольников (7 класс, глава IV, вопросы 19 и 20). Подводя итоги повторения, полезно обратить внимание учащихся на то, что равенство треугольников определяется тремя равными элементами, взятыми в определенной конфигурации; треугольник можно построить также по трем заданным элементам.

Теперь попробуем выяснить, можно ли по трем данным элементам треугольника найти остальные элементы треугольника, т.е. решить треугольник.

В ходе работы над данной темой полезно воспользоваться плакатом, представленным на рисунке 25 а). Задачи на решение треугольников, рассматриваемые в пункте 103, довольно часто являются фрагментами решения более содержательных и интересных задач. Поэтому умение решать эти задачи является программным требованием к знаниям учащихся. Единственность решения каждой задачи вытекает из соответствующего признака равенства треугольников.

Задача I: *Найти все элементы треугольника по двум сторонам и углу между ними.*

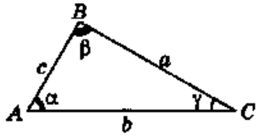
Приступая к решению задачи, следует заметить, что любые два треугольника с заданными двумя сторонами и углу между ними будут равны по первому признаку равенства треугольников. А это означает, что при решении треугольника по двум данным сторонам и углу между ними значения для третьей стороны и остальных двух углов имеют единственные значения, т.е. решение единственное.

При рассмотрении задачи полезно обратить внимание учащихся на два возможных способа нахождения углов треугольника. В то время как длина стороны c однозначно определяется с помощью теоремы косинусов, для определения углов треугольника можно применить и теорему косинусов (I способ), и теорему синусов (II способ). Оба способа обладают рядом достоинств и недостатков. Заметим, что при использовании первого способа угол определяется однозначно по знаку косинуса, но вычисления получаются весьма громоздкими. При использовании второго способа теорема синусов дает возможность довольно просто вычислить синус любого из этих углов. Однако значение синуса определяют два угла — острый и тупой. Следовательно, необходимо воспользоваться теоремой о соотношении сторон и углов треугольника.

Разберем возможные случаи:

1. Если сторона c — наибольшая, то углы α и β — острые.

2. Если сторона c — не наибольшая, то сначала находим угол, лежащий против меньшей из сторон a и b и, следовательно, являющийся острым. Третий угол находится из равенства $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



Дан треугольник ABC. Обозначим его стороны и углы:
$BC = a, AC = b, AB = c.$
$\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma.$
<u>Решение треугольника:</u>

<table>
<tr><td colspan="2">По двум сторонам и углу между ними
<u>Дано: a, b, γ.</u>
Найти: c, α, β.</td><td>По стороне и прилежащим к ней углам
<u>Дано: a, β, γ</u>
Найти: b, c, α.</td><td colspan="2">По трем сторонам
<u>Дано: a, b, c.</u>
Найти: α, β, γ.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$
$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$</td><td rowspan="3">$\alpha = 180° -$
$-(\beta + \gamma),$
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta},$
$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha};$
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma},$
$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$</td><td colspan="2">Пусть a — наибольшая сторона,
$a < b + c.$
$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha.$
$\cos\alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$</td></tr>
<tr><td>I способ
$a^2 = c^2 + b^2 -$
$- 2cb\cos\alpha.$
$\cos\alpha =$
$= \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$</td><td>II способ
1). Если <u>$\angle\gamma \geq 90°$</u>, $\angle\alpha$ и $\angle\beta$ — острые.
2). Если <u>$\angle\gamma < 90°$</u>, и $a < b$, $\angle\alpha$ — острый.
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma};$
$\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c}$</td><td>I способ
$b^2 = c^2 + a^2 -$
$- 2ac\cos\beta$
$\cos\beta =$
$= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$</td><td>II способ
$\frac{a}{\sin\alpha} =$
$= \frac{b}{\sin\beta},$
$\sin\beta =$
$= \frac{b\sin\alpha}{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\beta = 180° - (\alpha + \gamma).$</td><td colspan="2">$\gamma = 180° - (\alpha + \beta).$</td></tr>
</table>

Рис. 25 а)

<u>Задача II</u>. *Найти все элементы треугольника по стороне и двум углам.*

С этой задачей учащиеся фактически уже имели дело при изучении теоремы синусов. Полезно обратить внимание на то, что любые два треугольника, построенные по этим данным, будут равны по второму признаку, т.е. решение единственное.

<u>Задача III</u>. *Найти все элементы треугольника по трем сторонам.*

При рассмотрении этой задачи, как и в случае задачи I, полезно обратить внимание учащихся на два возможных способа нахождения углов треугольника. В то время как градусная мера наибольшего угла однозначно определяется с помощью теоремы косинусов, для определения одного из двух других углов треугольника можно применить и теорему косинусов (I способ), и теорему синусов (II способ). Поскольку сначала определяется наибольший угол, то два других будут заведомо острыми. Третий угол находится из равенства $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Следует заметить, что, как и задачи I и II, задача нахождения углов треугольника по трем данным сторонам имеет единственное решение в силу третьего признака равенства треугольников.

Рассмотрим более сложный пример решения треугольников.

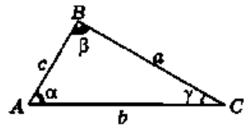
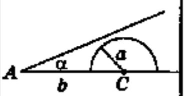
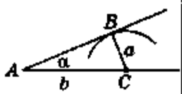
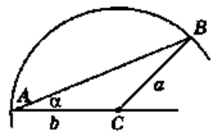
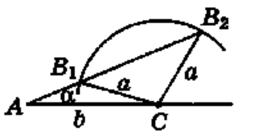
<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">По двум сторонам и углу, лежащему против одной из них.
<u>Дано: a, b, α.</u>
Найти: c, γ, β.</td></tr>
<tr><td colspan="5">$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ значит, $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$</td></tr>
<tr><td>$\sin\beta > 1$</td><td>$\sin\beta = 1$</td><td colspan="3">$0 < \sin\beta < 1$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
$a \geq b$</td><td colspan="2">
$a < b$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\beta = 90°$</td><td>$\alpha \geq \beta$,
значит,
$\angle\beta$ — острый.</td><td colspan="2">Существуют
два угла
β_1 — острый и
β_2 — тупой
$(180° - \beta_1)$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\gamma = 90° - \alpha$
$c = b \cdot \cos\alpha$</td><td>$\gamma = 180° -$
$-(\alpha + \beta)$.
$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$</td><td>$\gamma_1 = 180° -$
$-(\alpha + \beta_1)$
$c_1 = \frac{a\sin\gamma_1}{\sin\alpha}$</td><td>$\gamma_2 = 180° -$
$-(\alpha + \beta_2)$
$c_2 = \frac{a\sin\gamma_2}{\sin\alpha}$</td></tr>
<tr><td>Нет решения</td><td>Одно решение</td><td>Одно решение</td><td colspan="2">Два решения</td></tr>
</table>

Рис. 25 б)

Задача IV. *Найти все элементы треугольника по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них.*

Рассмотрение задачи целесообразно проводить с использованием заранее подготовленного плаката (рис. 25 б), из которого видно, в каком случае задача имеет два решения, одно решение, а в каком случае решения нет.

1-й случай: если $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a} > 1$ ($b \cdot \sin\alpha > a$), то решения нет.

2-й случай: если $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a} = 1$ ($b \cdot \sin\alpha = a$), то $\beta = 90°$; решение единственное. $\gamma = 90° - \alpha$, $c = b \cdot \cos\alpha$.

3-й случай: если $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a} < 1$ ($b \cdot \sin\alpha < a$) и:

1) $b > a$, то задача имеет два решения: существуют два угла β_1 и β_2 (острый и тупой), синусы которых равны.
2) $b = a$, то решение единственное и $\angle\beta$ — острый, так как углы при основании равнобедренного треугольника могут быть только острыми.
3) $b < a$, то решение единственное — $\angle\beta$ может быть только острым, так как против большей стороны лежит больший угол, то $\alpha \geq \beta$.

Можно решить задачу IV иначе. С помощью теоремы косинусов найти наибольший угол; воспользовавшись теоремой синусов, найти любой другой угол (он заведомо будет острым); третий угол находится из равенства $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

4°. Умение пользоваться таблицами или микрокалькуляторами для нахождения тригонометрических функций угла и, наоборот, нахождения угла по заданной одной из его тригонометрических функций не является программным. Поэтому если в условии задачи на решение треугольников требуется найти угол, то вполне достаточно определить одну из его тригонометрических функций. Однако если учитель сочтет полезным, можно объяснить учащимся, как пользоваться таблицами или микрокалькуляторами. Для углов, равных 30°, 45°, 60°, 90°, 135° и 150°, значения тригонометрических функций учащиеся должны знать наизусть.

В рабочей тетради при рассмотрении решения трех основных задач на решение треугольников и задачи IV следует воспользоваться таблицами, аналогичными приведенным выше. Использование в данной теме рабочей тетради позволяет сэкономить время учителя при подготовке к уроку, а также время на самом уроке. При этом у учащихся будет конспект урока, который, несомненно, поможет при выполнении домашнего задания.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 100; решить задачи 1020 а), 1021; дома — вопрос 8 из вопросов для повторения к главе XI, задачи 1020 б) и в), 1022, 1023.

На втором уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пунктов 101 и 102; решить задачу 1031; дома — вопросы: 9 и 10 из вопросов для повторения к главе XI, 21 и 22 из вопросов для повторения к главе IV, 18 из вопросов для повторения к главе VII; задачи: 595 а), 1026, 1033.

На третьем уроке в классе — провести самостоятельную работу по теме «Теорема о площади треугольника. Теорема синусов. Теорема косинусов»; рассмотреть весь теоретический материал пункта 103; дома — вопросы 11–13 из вопросов для повторения к главе XI; задача 1025 а), в), г), е), з).

На четвертом уроке в классе — провести систематизацию знаний по теме «Решение треугольников» в ходе решения задачи 1025 б), д), ж), и); решить задачи 1027, 1030; дома — решить задачи 1028, 1034, 1036.

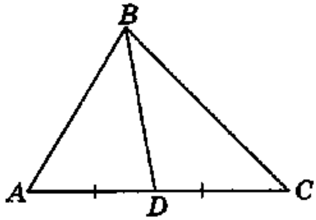
На пятом уроке в классе — провести самостоятельную работу по теме «Решение треугольников»; решить задачи 1057, 1059; дома — вопросы 4, 5, 6 и 13 (определение противоположного вектора) из вопросов для повторения к главе IX, задачи 1029, 1035, 1038.

Самостоятельная работа по теме «Теорема о площади треугольника. Теорема синусов. Теорема косинусов»

Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

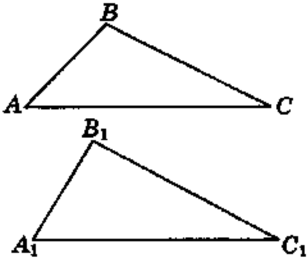
1 *вариант*

1. Медиана AD треугольника ABC равна $3\sqrt{3}$ см и образует с основанием треугольника AC угол, равный 60°. Сторона AC равна 4 см. Найдите площадь треугольника.



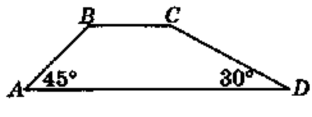
Ответ: ____________________

2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ стороны AB и A_1B_1, AC и A_1C_1 попарно равны. Угол BAC равен 45°, а угол $B_1A_1C_1$ равен 60°. Найдите отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.



Ответ: ____________________

3. Углы BAD и CDA при основании AD трапеции $ABCD$ равны 45° и 30° соответственно, боковая сторона AB равна $5\sqrt{2}$ см. Найдите сторону CD.



1. $10\sqrt{2}$ см; 2. $5\sqrt{\frac{1}{2}}$ см;

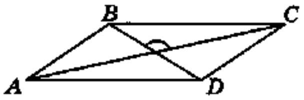
3. 10 см; 4. $5\sqrt{2}$ см.

Ответ: ____________________

4. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине равен 45°, а боковая сторона равна 4 см. Найдите основание треугольника.

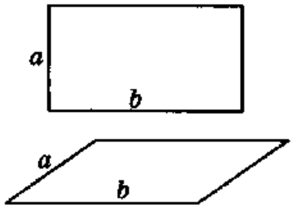
Ответ: ____________________

2 вариант



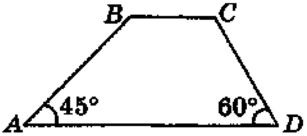
1. Диагонали параллелограмма равны 9 см и 4 см, а угол между ними равен 120°. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ: ____________________



2. Параллелограмм и прямоугольник имеют равные стороны a и b, а острый угол параллелограмма равен 45°. Найдите площадь параллелограмма, если площадь прямоугольника равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см².

Ответ: ____________________



3. Углы BAD и CDA при основании AD трапеции $ABCD$ равны 45° и 60° соответственно, боковая сторона AB равна $5\sqrt{3}$ см. Найдите сторону CD.

1. $10\sqrt{2}$ см; 2. $5\sqrt{\frac{1}{2}}$ см;

3. 5 см; 4. $5\sqrt{2}$ см.

Ответ: ____________________

4. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине равен 150°, а боковая сторона равна 6 см. Найдите основание треугольника.

Ответ: ____________________

Самостоятельная работа по теме: «Решение треугольников»

Самостоятельная работа планируется на 20 мин.

1 вариант

1. Найдите синус и косинус наибольшего угла треугольника, стороны которого равны 40 см, 75 см и 105 см.

2. Найдите синусы и косинусы углов треугольника, две стороны которого равны 10 см и 8 см, а угол между ними 60°.

3. В треугольнике одна сторона равна 58 см, а косинус противолежащего ей угла равен 0,6. Другая сторона треугольника равна 50 см. Найдите третью сторону и косинусы двух других углов.

2 вариант

1. Найдите синус и косинус наименьшего угла треугольника, стороны которого равны 45 см, 70 см и 95 см.

2. В треугольнике две стороны равны 14 см и 16 см, а косинус угла между ними равен $\frac{1}{2}$. Найдите третью сторону и синусы двух других углов.

3. В треугольнике одна сторона равна 30 см, а косинус противолежащего ей угла равен $\frac{10}{21}$. Другая сторона треугольника равна 26 см. Найдите третью сторону и синусы всех углов треугольника.

Указания к задачам

Задача 1029. Пусть сторона AB равна a, $\angle BAC = \alpha$, а $\angle ABC = \beta$ (рис. 26).

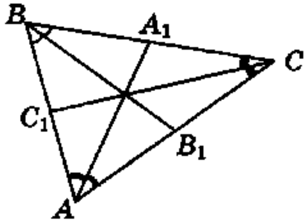


Рис. 26

Рассмотрим треугольник BB_1A.

$$\angle BB_1A = 180^\circ - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right); \ \sin\left(180^\circ - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right).$$

$$\frac{BB_1}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}; \quad BB_1 = \frac{a \cdot \sin\alpha}{\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}.$$

Аналогично из треугольника AA_1B находится

$$AA_1 = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

В треугольнике ABC $\angle BCA = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, $\sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$.

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)}; \ BC = \frac{a \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

В треугольнике CC_1B

$$\angle CC_1B = 180^\circ - \beta - \frac{180^\circ - (\alpha + \beta)}{2} = 90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Так как в условии задачи не определено, какой из углов, α или β, больше, то возможны два варианта.

$\alpha \ge \beta;\ \frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2} \ge 0$	$\alpha < \beta;\ \frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2} < 0$
$\sin\left(90°-\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\right)=\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)$	$\sin\left(90°-\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\right)=\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)$
$\frac{CC_1}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin\left(90°-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}$	$\frac{CC_1}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin\left(90°-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}$
$CC_1=\frac{a\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\left(90°-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)};$	$CC_1=\frac{a\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\left(90°-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)};$
$CC_1=\frac{a\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}.$	$CC_1=\frac{a\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}.$

Задача 1032. На рисунке 27 равные силы, отложенные от точки A, представлены векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$, а их равнодействующая вектором $\overline{AC}$. Рассмотрим треугольник ABC:

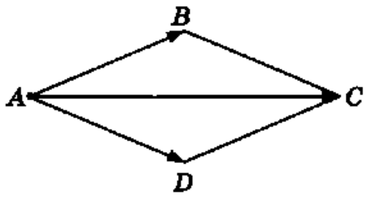


Рис. 27

$AB = BC$, $\angle BAC = \angle BCA = 36°$, $\angle ABC = 108°$. Обозначим $AB = BC = x$, $\angle ABC = \beta$, $\cos\beta \approx -0{,}31$. По теореме косинусов: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\beta = x^2 + x^2 - 2x^2\cos\beta = 2x^2(1-\cos\beta)$. $120^2 = 2x^2(1-(-0{,}31))$; $x \approx 74{,}1$.

Задача 1035. Теорема о произведении отрезков пересекающихся хорд дает возможность найти значение EB из соотношения $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ (рис. 28 а). Обозначим $EB = x$, тогда $(13 - x)\,x = 9 \cdot 4$, отсюда получаем для EB два значения — 4 см и 9 см. В первом случае треугольники DEB и CEA подобные, во втором — равны (рис. 28 б и в). Рассмотрим треугольник DEB (см. рис. 28 б).

По теореме косинусов:

$BD^2 = DE^2 + BE^2 - 2DE \cdot BE\cos\beta$. Откуда $\cos\beta = -0{,}5$; отсюда $\angle DEB = 120°$. Следовательно, острый угол, который образуют данные хорды, равен 60°. Аналогично во втором случае рассмотрим треугольник DEB (см. рис. 28 в), применив теорему косинусов, получим $\cos\beta \approx -0{,}68$; значит, острый угол, который образуют данные хорды, равен 47,113°.

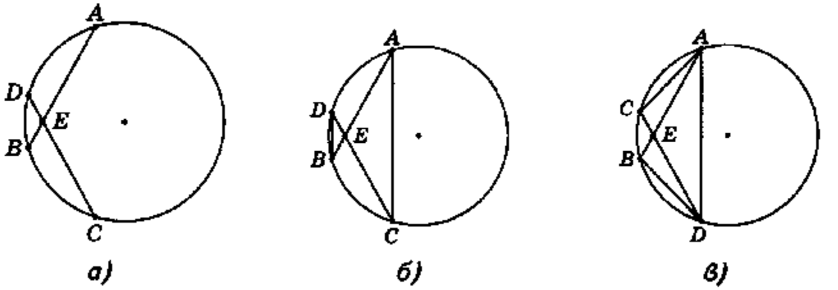


Рис. 28

Дополнительные задачи

1. Докажите, что площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

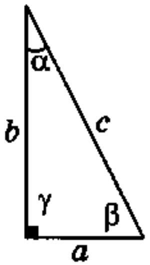


Рис. 29

2. Основание треугольника равно 6 см, один из углов при основании равен 120°, сторона, лежащая против этого угла, равна 14 см. Найдите третью сторону.

3. Сторона треугольника равна 26 см, а две другие стороны образуют угол, равный 120°, и относятся как 7 : 8. Найдите эти стороны.

4. Основание треугольника равно 7 см, противолежащий ему угол равен 60°, сумма двух других сторон равна 13 см. Найдите эти стороны.

5. Дан прямоугольный треугольник (рис. 29). Докажите, что

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

6. Диагональ d параллелограмма делит его угол на части, равные α и β. Найдите стороны параллелограмма.

§3. Скалярное произведение векторов (2 ч.)

Комментарий для учителя

В этом параграфе вводится еще одна операция над векторами, а именно, *скалярное произведение векторов*. Определение *скалярного произведения векторов* вводится через длины векторов и угол между ними. Теорема о вычислении *скалярного произведения векторов* с использованием координат заданных векторов позволяет найти угол между векторами.

Текущие результаты изучения §3. Учащиеся должны научиться:

— формулировать и объяснять определения *скалярного произведения векторов* и угла между векторами;

— формулировать и доказывать теорему о *скалярном произведении векторов*, заданных координатами;

— формулировать и объяснять свойства *скалярного произведения векторов*;

— вычислять *скалярное произведение векторов*;

— находить угол между векторами;

— устанавливать перпендикулярность векторов и прямых;

— применять при решении задач на вычисления и доказательство скалярное произведение векторов и его свойства.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. После введения определения *угла между векторами* можно предложить учащимся следующие упражнения на его закрепление.

По рисунку 30 определите, какой угол образуют векторы:

а) $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; б) $\overline{AB}$ и $\overline{BD}$; в) $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

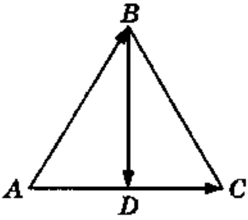


Рис. 30

Заметим, что при решении первого упражнения данные векторы имеют общее начало — точку A. Во втором необходимо построить вектор, равный вектору $\overline{BD}$ с началом в точке A, или вектор, равный вектору $\overline{AB}$ с началом в точке B.

2°. При объяснении определения *скалярного произведения векторов* следует подчеркнуть, что это произведение — <u>число</u>. В результате всех рассмотренных операций над векторами (сумма, разность, произведение вектора на число) получали снова вектор, а в результате *скалярного произведения векторов* получаем <u>число</u>, а не вектор.

После введения определения *скалярного произведения векторов* можно предложить учащимся в ходе решения следующих упражнений обсудить вопрос об угле между сонаправленными и противоположно направленными векторами. Их решение следует непосредственно из выражения $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$.

> 1. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, если:
> 1) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены;
> 2) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены.
> 2. При каком расположении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливы соотношения:
> 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ и 2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$?
> 3. При каком расположении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ их скалярное произведение:
> 1) положительно; 2) отрицательно; 3) равно нулю?

Затем можно сформулировать следствие из определения *скалярного произведения* в виде прямого и обратного утверждений (рис. 31). Их доказательство следует непосредственно из выражения $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$.

I. *«Если ненулевые векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю».* <u>Дано: $\bar{a}\perp\bar{b}$, $\bar{a}\neq 0$, $\bar{b}\neq 0$</u> Доказать: $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.	II. *«Если скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны».* <u>Дано: $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$, $\bar{a}\neq 0$, $\bar{b}\neq 0$</u> Доказать: $\bar{a}\perp\bar{b}$.

Рис. 31

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать определения перпендикулярных векторов и скалярного произведения векторов. Затем записать условие равенства нулю скалярного произведения векторов и выполнить упражнения 39–41, аналогичные приведенным выше.

3°. При проведении доказательства теоремы о *скалярном произведении векторов*, заданных координатами, следует обратить внимание учащихся на то, что в доказательстве теоремы используются координаты вектора. Однако система координат не задается, значит, *скалярное произведение* не зависит от выбора системы координат.

На непосредственное применение теоремы о *скалярном произведении векторов, заданных координатами*, можно предложить учащимся решить задачу 1044 а).

Из теоремы о *скалярном произведении векторов, заданных координатами*, вытекают два следствия, которые можно предложить учащимся доказать самостоятельно, сформулировав их в виде задач:

1. а) Если ненулевые векторы $\vec{a}\,\{a_1;a_2\}$ и $\vec{b}\,\{b_1;b_2\}$ перпендикулярны, то

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0.$$

1. б) Если $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0$, где a_1 и a_2 не равны 0 одновременно, и b_1 и b_2 не равны 0 одновременно, то векторы $\vec{a}\,\{a_1;\, a_2\}$ и $\vec{b}\,\{b_1;\, b_2\}$ перпендикулярны.

Эти два следствия задают необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов.

2. Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}\,\{a_1;\, a_2\}$ и $\vec{b}\,\{b_1;\, b_2\}$ выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

На непосредственное применение следствия 1 из теоремы можно предложить учащимся решить задачи 1046 и 1047 а). Полученная формула для вычисления $\cos\alpha$ при доказательстве следствия 2 дает возможность отыскания углов между ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если известны их координаты. На непосредственное применение полученной формулы можно решить задачу 1048 (найти один из углов треугольника).

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулу скалярного произведения векторов в координатах. Затем предложить учащимся разобрать по тексту тетради доказательство первой части следствия 1. После чего доказать самостоятельно вторую часть следствия 1 и записать формулу для вычисления косинуса угла между ненулевыми векторами. Выше приведенные следствия рассматриваются в ходе решения задач 42 и 43. На непосредственное применение следствий из теоремы о скалярном произведении векторов, заданных координатами, можно вместо выше предложенных задач из учебника выполнить упражнения 44–46.

4°. Учащиеся знают, что для *произведения вектора на число* выполняются сочетательный и распределительный законы. Полезно предложить им проверить верность этих законов для *скалярного произведения векторов*, а также доказать, что для *скалярного произведения векторов* выполняется переместительный закон и что *скалярный квадрат* ненулевого вектора больше нуля. Для этого свойства *скалярного произведения векторов* полезно сформулировать в виде задач.

Даны векторы $\overline{a}\{a_1; a_2\}$, $\overline{b}\{b_1; b_2\}$ и $\overline{c}\{c_1; c_2\}$.

1. Найдите, чему равно скалярное произведение вектора $\overline{a}$ самого на себя, т.е. $\overline{a}\cdot\overline{a}$, и докажите, что $\overline{a}^2 \geq 0$, причем если $\overline{a} \neq 0$, то $\overline{a}^2 > 0$.

2. Докажите, что $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$.

3. Докажите, что $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$.

4. Докажите, что $(k\overline{a})\cdot\overline{b} = k(\overline{a}\cdot\overline{b})$.

На непосредственное применение свойств *скалярного произведения векторов* можно предложить следующее упражнение.

Даны векторы $\overline{a}\{a_1; a_2\}$ и $\overline{b}\{b_1; b_2\}$. Найдите формулы для квадрата суммы, квадрата разности и разности квадратов данных векторов.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать свойства скалярного произведения векторов. Затем выполнить упражнения 47 и 48. Для иллюстрации применения скалярного произведения векторов можно предложить учащимся разобрать по тексту тетради решение задачи 49.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пунктов 105 и 106; решить задачи 1039 а) и г), 1040 а) и д), 1041 в) и 1042 б); дома — вопросы: 14 и 17 из вопросов для повторения к главе IX, вопросы 14–17 из вопросов для повторения к главе XI; задачи 1039 б), ж) и з), 1040 б) и в), 1041 б), 1042 а) и г).

На втором уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пунктов 107 и 108; решить задачи 1044 а) и б), 1046, 1047 а) и 1048, 1052; дома — вопрос 4 (повторить формулу) из вопросов для повторения к главе V, вопросы 21–26 (повторить только формулировки) из вопросов для повторения к главе VIII, вопросы 18–22 из вопросов для повторения к главе XI, задачи 1044 в), 1045, 1047 б), 1049, 1051.

Указания к задачам

В задачах 1048 и 1049 угол A треугольника ABC является углом между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, угол B — между векторами $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$, угол C — между векторами $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$. По данным координатам вершин треугольника найдем координаты каждого из этих векторов и определим косинусы углов, применив формулу для вычисления косинуса угла между ненулевыми векторами.

Задача 1056. В ромбе $ABCD$ (рис. 32) $\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{AD}=\overline{b}$,

$\overline{AC}=\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{DB}=\overline{a}-\overline{b}$.

$\overline{AC}\cdot\overline{DB}=\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\left(\overline{a}-\overline{b}\right)=$

$=\left|\overline{a}\right|^2-\left|\overline{b}\right|^2=0$.

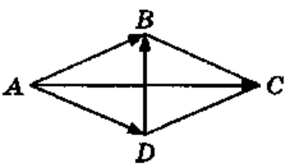


Рис. 32

Систематизация и обобщение знаний по теме «Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов»

Комментарий для учителя

1°. В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов» учащиеся должны:

— выделять на чертеже, данном в условии задачи, конфигурации, необходимые для решения треугольников;

— вычислять скалярное произведение векторов, находить угол между векторами, устанавливать перпендикулярность векторов и прямых;

— решать треугольники в общем виде;

— вычислять *скалярное произведение векторов*, значение угла между векторами;

— применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- теоремы косинусов, синусов, соотношения между углами и сторонами треугольника;
- формулу площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab \sin C$;
- определения синуса, косинуса, тангенса для любого угла от 0° до 180°;
- основное тригонометрическое тождество;
- формулы приведения;
- формулы для вычисления координат точки;
- скалярное произведение векторов и его свойства.

2°. Подготовку к контрольной работе по теме: «Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов» полезно организовать как урок решения задач. Для этого можно использовать нерешенные задачи из учебника, в ходе решения которых провести повторение по материалу параграфа. Кроме того, можно подобрать задачи из дополнительных задач методического пособия, рекомендованные к соответствующим пунктам, в зависимости от уровня подготовки класса.

В сборнике тестов Т.М. Мищенко, А.Д. Блинков «Геометрия. Тесты. 9 класс» к учебнику Л.С. Атанасян и др. издательства «Просвещение» для главы XI «Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов» рекомендованы тесты 4–6, направленные на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении данной темы. Каждый тест имеет четыре варианта, и их можно использовать при подготовке к контрольной работе.

Так как тесты не предполагают письменного оформления каждого задания, то можно устно выполнить один из вариантов, при этом полезно разобрать хотя бы одну из десятых задач, решение которой позволяет определить уровень сформированности умения применять изученные теоремы и требует достаточно высокой вычислительной культуры.

3°. В контрольной работе первые три задачи — это задачи с выбором ответа и со свободным ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задачах 4 и 5 решение записывается полностью с краткой записью условия и выполнением чертежа.

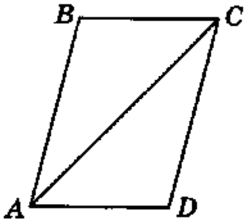
Контрольная работа по теме: «Соотношения между сторонами и углами треугольника»

1 вариант

1. Упростите выражение: $b \cdot \sin 45° + b \cdot \cos 135° + b \cdot \sin 180°$.
   1. 0; 2. b; 3. $b\sqrt{2}$; 4. $b\left(\sqrt{2}+1\right)$.

2. Найдите острый угол между диагоналями параллелограмма, если его большая сторона равна $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см, а диагонали равны $\sqrt{3}$ см и 1 см.

   Ответ: ____________________



3. Диагональ параллелограмма делит его угол на части, равные 45° и 30°. Найдите отношение большей стороны параллелограмма к его меньшей стороне.

Ответ: ____________________

4. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в вершине равнобедренного треугольника, а их концы находятся в вершинах при основании этого треугольника. Найдите угол между векторами $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$.

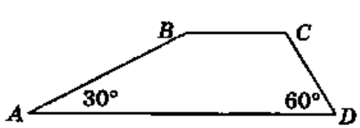
5. Докажите, что если диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

2 вариант

1. Упростите выражение: $b \cdot \sin 120° + b \cdot \cos 150° + b \cdot \sin 90°$.
1. 0; 2. b; 3. $b\sqrt{3}$; 4. $b\left(\sqrt{3}+1\right)$.

2. Найдите меньший угол параллелограмма, если его стороны равны 1 и $\sqrt{3}$, а одна из диагоналей равна $\sqrt{7}$.

Ответ: ____________________



3. Углы при основании AD трапеции равны 60° и 30°. Найдите отношение сторон AB и CD.

Ответ: ____________________

4. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в одной из вершин ромба, а их концы находятся в соседних с первой вершинах этого ромба. Найдите угол между векторами $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$.

5. Докажите, что биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

ГЛАВА XII

Длина окружности и площадь круга (10 ч.)

Комментарий для учителя

В этой главе продолжается изучение свойств многоугольников и окружности, а именно, правильных многоугольников, а также описанных и вписанных окружностей. Поэтому в методическом плане понятия, вводимые в этом параграфе, в известной степени знакомы учащимся и достаточно просты, а значит, не требуют значительных временных затрат на их отработку. Это дает возможность закрепление введенной терминологии соединить с повторением вопросов, связанных с данной темой, из курса геометрии VIII класса. При этом изучение свойств правильных многоугольников, вписанных в окружность и описанных около окружности, и их периметров позволяет подготовить учащихся к пониманию определения длины окружности и площади круга как предельного перехода от периметра и площади многоугольника. При этом предельный переход используется в неявном виде. Такое определение длины окружности и площади круга позволяет вывести формулы для их вычисления.

Планируемые итоговые результаты изучения главы XII

Учащиеся должны научиться:

— объяснять понятия длины окружности и площади круга, опираясь на наглядные представления;

— формулировать и иллюстрировать определение правильного многоугольника;

— формулировать, иллюстрировать и доказывать теоремы о существовании окружностей, вписанных в правильные многоугольники, и окружностей, описанных около правильных многоугольников;

— объяснять, как расположены центры вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника, понятие центра многоугольника;

— объяспять, как расположены точки касания вписанной окружности на сторонах многоугольника;

— понимать, что «отношение длины окружности к ее диаметру есть величина постоянная для всех окружностей»;

— выводить формулы длины окружности и площади круга;

— выводить формулы, связывающие радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности со стороной правильного n-угольника; формулы длины окружности и длины дуги окружности;

— вычислять длину окружности, длину дуги окружности;

— вычислять площади круга, кругового сектора и кругового сегмента;

— решать задачи на построение правильных многоугольников;

— *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- формулы, связывающие радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности со стороной правильного n-угольника;
- формулы длины окружности и длины дуги окружности;
- формулы площади круга, кругового сектора и кругового сегмента;
- алгебраический аппарат.

Учащиеся получат возможность научиться:

— применять метод площадей при решении задач на вычисления и доказательство.

§1. Правильные многоугольники (3 ч.)

Комментарий для учителя

Рассматриваемый в этом параграфе материал находит широкое применение при изучении тем данной главы «Длина окружности» и «Площадь круга».

После того как доказаны теоремы существования описанной и вписанной окружностей, для любого правильного многоугольника выводятся формулы, выражающие радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности через сторону соответствующего правильного многоугольника. Эти формулы важны не только как описывающие одно из свойств многоугольников, но и в практическом приложении.

Текущие результаты изучения §1. Учащиеся должны научиться:

— формулировать и иллюстрировать определение правильного многоугольника;

— формулировать, иллюстрировать и доказывать теоремы о существовании окружностей, вписанных в правильные многоугольники, и окружностей, описанных около правильных многоугольников;

— объяснять расположение центров вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника, понятие центра правильного многоугольника;

— объяснять расположение точек касания вписанной окружности на сторонах многоугольника и понятие центра правильного многоугольника;

— выводить формулу длины окружности;

— выводить формулу площади многоугольника;

— выводить формулы, связывающие радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности со стороной правильного n-угольника; формулы длины окружности и длины дуги окружности;

— решать задачи на построение правильных многоугольников;

— применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- формулы, связывающие радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности со стороной правильного n-угольника;
- формулы длины окружности и длины дуги окружности;
- формулы площади круга, кругового сектора и кругового сегмента;
- алгебраический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

При введении определения *правильного многоугольника* следует обратить внимание учащихся на те признаки, которые позволяют из всех многоугольников выделить данный конкретный вид, а именно *правильные многоугольники*. Другими словами, если в условии сказано: «... *правильный многоугольник* ...», то учащиеся должны уметь записать равенство всех сторон и всех углов в ходе решения задачи или в краткой записи условия. Формирование этого навыка будет проходить в процессе изучения всей темы.

1°. Для формирования умения применять понятие *правильного многоугольника* и умения находить их в стандартных ситуациях рекомендуется выполнить работу по готовым чертежам. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунке 33, включив в набор заданных фигур контрпримеры 1), 2), 6) и 8). Поскольку понятие *правильного многоугольника* является обобщением известных учащимся понятий (квадрат и равносторонний треугольник), то полезно в набор фигур плаката включить треугольники и четырехугольники. Работу с плакатом можно сопроводить вопросами:

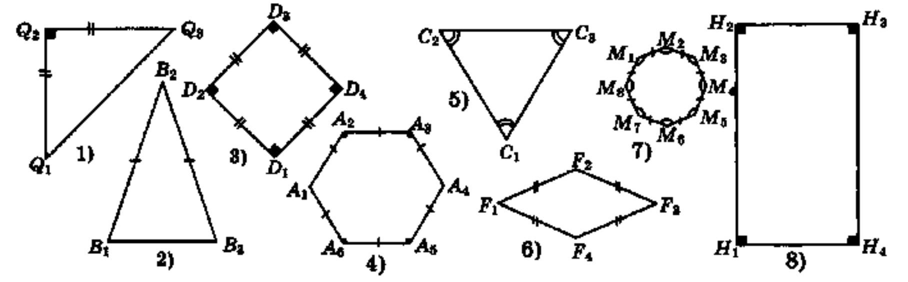


Рис. 33

1. Определите, на каких рисунках даны *правильные многоугольники*.

2. Объясните, почему фигуры под номерами 1), 2), 6) и 8) не являются *правильными многоугольниками*.

3. Какие треугольники являются *правильными многоугольниками*?

4. Какие четырехугольники являются *правильными многоугольниками*?

2°. После вывода формулы *вычисления угла α_n правильного n-угольника* следует решить задачу 1082, результатом решения которой полезно воспользоваться при решении других задач.

На формирование умения применять формулу *вычисления угла α_n правильного n-угольника* можно предложить учащимся устно выполнить задачи 1081 б) и д), 1083 в).

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать определение правильного многоугольника и формулу вычисления угла α_n правильного n-угольника. После чего выполнить задания 50 и 51, которые являются полным аналогом работы с плакатом, но не требуют от учителя значительных затрат времени на его изготовление. Кроме того, наличие рабочей тетради позволяет сэкономить время на уроке, при этом сделанные краткие записи помогут учащимся в дальнейшем при повторении, как тематическом, так и итоговом. На формирование умения применять формулу вычисления угла α_n правильного n-угольника можно вместо рекомендованных задач из учебника выполнить упражнения 53–55 из рабочей тетради.

3°. Сформулировав теорему об окружности, описанной около правильного многоугольника, следует обратить внимание учащихся на то, что в ней содержатся два утверждения: существование окружности («*около любого правильного многоугольника можно описать окружность*») и ее единственность («*и притом только одну*»).

Изучение теоремы начинается с выполнения рисунка 34. При этом полезно выделить соответственно равные элементы.

Из формулировки теоремы «*Около любого правильного многоугольника можно описать окружность и притом только одну*» выделяется условие и заключение теоремы. После чего делается краткая запись:

Дано: $\angle A_nA_1A_2 = \angle A_1A_2A_3 = \ldots = \angle A_{n-2}A_{n-1}A_n = \angle A_{n-1}A_nA_1$
$A_nA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n$.

Доказать: Существует точка O такая, что $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \ldots = OA_n$

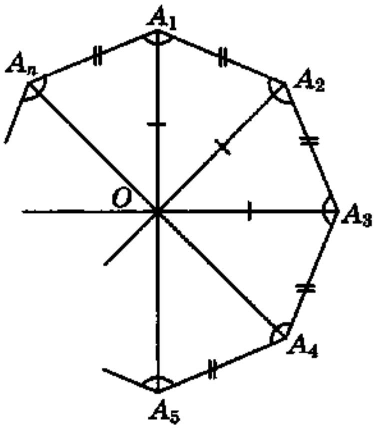


Рис. 34

Доказательство существования описанной окружности сводится к нахождению точки, равноудаленной от всех вершин правильного многоугольника. Значит, при объяснении доказательства следует привлечь внимание учащихся к дополнительному построению. Рассуждения по поводу того, почему и как определяется дополнительное построение, в данной теме достаточно сложны, поэтому проводить их или нет, учитель решает в зависимости от уровня геометрической подготовки класса. Если класс недостаточно подготовлен, то достаточно просто заметить, что выполняется дополнительное построение.

Обоснование дополнительного построения. По предположению существует точка O — центр описанной окружности, который равноудален от всех вершин, а это значит, что $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \ldots = OA_n$, что в свою очередь означает, что треугольники A_nOA_1, A_1OA_2, A_2OA_3, ... и $A_{n-1}OA_n$ — равнобедренные, равные по трем сторонам (две стороны — расстояние от центра описанной окружности до вершин и третья — стороны правильного многоугольника). Из равенства треугольников следует $\angle A_nA_1O = \angle OA_1A_2 = \angle A_1A_2O = \angle OA_2A_3 = \angle A_2A_3O = \angle OA_3A_4 = \ldots = \angle OA_nA_1$, а это значит, что отрезки OA_1, OA_2, OA_3, ... и OA_n — биссектрисы углов $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, ... и $A_{n-1}A_nA_1$ соответственно. Таким образом, если по предположению существует точка O — центр описанной окружности, то он лежит на пересечении биссектрис углов правильного многоугольника. Теперь перепишем условие теоремы в соответствии с предполагаемым дополнительным построением.

Дано: $\angle A_nA_1A_2 = \angle A_1A_2A_3 = \ldots = \angle A_{n-2}A_{n-1}A_n = \angle A_{n-1}A_nA_1$
$A_nA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n$.
O — точка пересечения биссектрис углов $A_nA_1A_2$ и $A_1A_2A_3$.

Доказать: Точка O — такая, что $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \ldots = OA_n$.

Далее доказательство существования описанной окружности проводится в точном соответствии с текстом учебника.

Единственность описанной окружности следует из единственности описанной окружности треугольника.

4°. При формулировке *теоремы об окружности, вписанной в правильный многоугольник*, как и в случае теоремы *об окружности, описанной около правильного многоугольника*, следует обратить внимание учащихся на то, что в ней содержатся два утверждения: *существование* окружности (*«в любой правильный многоугольник можно вписать окружность»*) и ее *единственность* (*«и притом только одну»*).

Доказательство существования окружности, вписанной в правильный многоугольник, фактически является продолжением доказательства существования окружности, описанной около правильного многоугольника.

После рассмотрения доказательств *теоремы об окружности, описанной около правильного многоугольника*, и *теоремы об окружности, вписанной в правильный многоугольник*, следует обратить внимание учащихся на то, что в ходе доказательств этих теорем устанавливается важный факт: *«Для правильного многоугольника центры вписанной и описанной около него окружностей совпадают»*. Он зафиксирован в учебнике как следствие 2.

Кроме того, из доказательств этих теорем вытекает *правило нахождения для правильного многоугольника общего центра описанной и вписанной окружностей*, а также их радиусов:

1. Чтобы найти центр описанной около правильного многоугольника окружности, нужно построить точку пересечения перпендикуляров, проведенных к серединам двух соседних сторон. Радиусом описанной окружности является отрезок, соединяющий точку пересечения серединных перпендикуляров с вершиной многоугольника.

2. Чтобы найти центр вписанной в правильный многоугольник окружности, нужно построить точку пересечения биссектрис двух соседних углов. Радиусом вписанной окружности является перпендикуляр, проведенный из точки пересечения биссектрис к стороне многоугольника.

После этого можно предложить учащимся задачу 1084 а) и е) и практическое задание:

> Начертите квадрат и постройте две окружности: а) вписанную в него; б) описанную около него.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировки теоремы об окружности, описанной около треугольника, и теоремы об окружности, вписанной в треугольник. Если учитель сочтет необходимым, полезно повторить решение задачи 1033 из учебника. В рабочей тетради она дана под номером 63. После чего записать формулировки тео-*

ремы об окружности, описанной около правильного многоугольника, теоремы об окружности, вписанной в правильный многоугольник, и следствий из этих теорем. Предлагаемые задания 64 и 65 являются задачами повышенного уровня сложности, и их лучше использовать для работы с сильными учащимися.

5°. Вывод формулы для вычисления *площади правильного многоугольника* и формул, связывающих *радиус* (R) *описанной окружности* и *радиус* (r) *вписанной окружности* с длиной стороны (a_n) правильного n-угольника, полезно выполнить в процессе решения следующих задач.

Дано: R — радиус описанной окружности;
r — радиус вписанной окружности;
a_n — сторона правильного многоугольника.

1. Найти: $S_{A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n}$;
2. Выразить a_n и r через R;
3. Выразить a_n и R через r;
4. Выразить r и R через a_n.

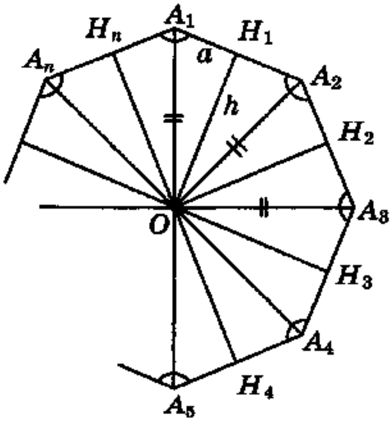


Рис. 35

Для решения этих задач полезно заранее выполнить чертеж, как на рисунке 35. Перед решением полезно пояснить учащимся, что n-угольник необходимо разбить на n треугольников, и искомые элементы определяются из треугольника A_1OA_2, у которого OH_1 — высота, а OA_1 и OA_2 — биссектрисы углов $A_nA_1A_2$ и $A_1A_2A_3$ данного правильного n-угольника.

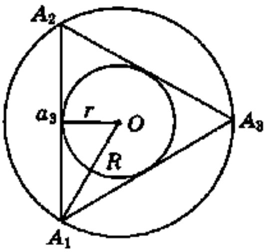
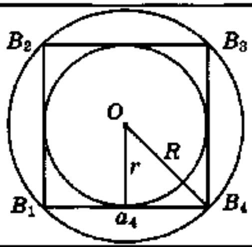
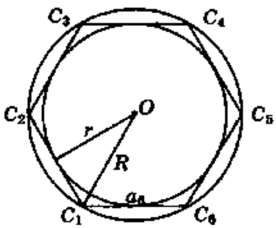
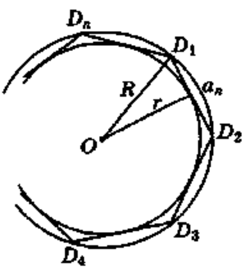
Число сторон n-угольника		Выражение радиусов вписанной r_n и описанной R_n окружностей через сторону a_n n-угольника		Выражение стороны a_n n-угольника через радиусы описанной R_n и вписанной r_n окружностей	
		R	r	R	r
3		$R_3 = \frac{a}{\sqrt{3}}$	$r_3 = \frac{a}{2\sqrt{3}}$	$a_3 = R\sqrt{3}$	$a_3 = 2r\sqrt{3}$
4		$R_4 = \frac{a}{\sqrt{2}}$	$r_4 = \ r_4 = \frac{a}{2}$	$a_4 = R\sqrt{2}$	$a_4 = 2r$
6		$R_6 = a$	$r_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$a_6 = R$	$a_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}}$
n		$R_n = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$	$r_n = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$	$a_n = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$	$a_n = 2r \cdot \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$

Рис. 36

После вывода формул для правильного n-угольника следует рассмотреть их частные случаи. Вывод формул для частных случаев при n, равном 3, 4 и 6, полезно проиллюстрировать таблицей (рис. 36), которая поможет учащимся яснее понять геометрический смысл величин, входящих в формулы. Эту таблицу можно использовать как плакат, который будет полезен при организации устного решения задач.

На формирование умения применять полученные формулы можно предложить учащимся задачи 1089, 1092 и 1094 в).

> *В рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулу для вычисления площади правильного многоугольника. Затем в процессе решения задач 66 и 67 доказать формулы, связывающие радиус (R) описанной окружности и радиус (r) вписанной окружности с длиной стороны (a_n) правильного n-угольника. Фактически эти задачи заменяют предложенную выше работу с таблицей — плакатом. После чего выполнить задания 68 и 69.*

6°. Материал пункта 113 достаточно прост, поэтому его можно задать на дом для самостоятельной работы.

> *В рабочей тетради следует предложить учащимся выполнить упражнение 56 устно и с записью решения задачу 57. В задачах 58–62 сформулированы свойства некоторых правильных многоугольников. Эти задачи рекомендуется решить на уроке решения задач. Некоторые из этих задач помещены в дополнительные задачи методического пособия.*

7°. В самостоятельной работе «Правильные многоугольники» первые три задачи — это задачи со свободным ответом или с выбором ответа. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задаче 4 решение записывается полностью.

Примерное планирование изучения материала

На <u>первом</u> уроке <u>в классе</u> — рассмотреть весь теоретический материал пунктов 109–111; решить задачи 1081 б) и д), 1082, 1083 в), 1084 а) и е); дома — вопросы 1–4 из вопросов для повторения к главе XII, задачи 1079 (устно), 1085, 1086.

На втором уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 112; решить задачи 1089, 1092 и 1094 в); дома — разобрать по тексту учебника пункт 113; вопросы: 5–7 из вопросов для повторения к главе XII; задачи 1087, 1093, 1094 а), 1096.

На третьем уроке в классе — провести самостоятельную работу по теме «Правильные многоугольники»; решить задачи 1081 в), 1094 г), 1095 и 1099; дома —задачи 1087 и 1097.

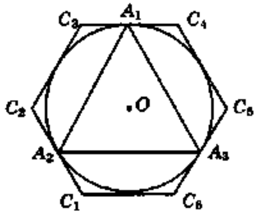
Самостоятельная работа по теме «Правильные многоугольники»

Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

1 вариант

1. Сторона правильного шестиугольника равна 3 см. Найдите радиус описанной около него окружности.

Ответ: ____________________



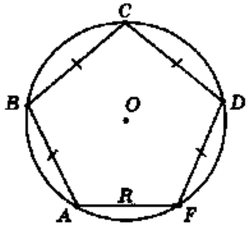
2. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в окружность, если сторона правильного шестиугольника, описанного около этой окружности, равна 2 см.

Ответ: ____________________

3. Найдите площадь правильного шестиугольника, если его большая диагональ равна 4.

1. $24\sqrt{3}$; 2. $6\sqrt{3}$; 3. $\sqrt{3}$; 4. 6.

Ответ: ____________________



4. В окружность диаметра 12 см вписан пятиугольник, одна сторона которого равна 6 см, а все остальные равны между собой. Найдите наибольший угол пятиугольника.

Ответ: ____________________

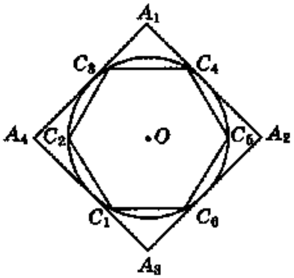
2 вариант

1. Сторона правильного треугольника равна $4\sqrt{3}$ см. Найдите радиус вписанной в него окружности.

   Ответ: ____________________

2. Найдите сторону квадрата, описанного около окружности, если сторона правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность, равна 3 см.

   Ответ: ____________________

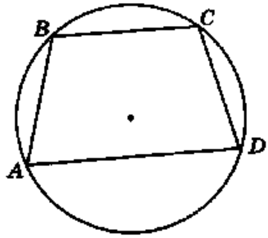


3. Найдите площадь правильного шестиугольника, если его сторона равна 2.
   1. $24\sqrt{3}$; 2. $6\sqrt{3}$; 3. $\sqrt{3}$; 4. 6.

   Ответ: ____________________

4. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Найдите угол CDA, если $\angle BAD = 62°$.

   Ответ: ____________________



Дополнительные задачи

1. Определите внутренний угол правильного n-угольника, если: 1) $n = 4$; 2) $n = 5$; 3) $n = 12$; 4) $n = 24$.

2. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, внутренний угол которого равен: 1) 140°; 2) 144°; 3) 160°; 4) 162°?

3. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если его внешний угол равен: 1) 72°; 2) 45°?

4. Нарисуйте треугольник, у которого центры вписанной и описанной окружностей не совпадают. (Любой треугольник, не являющийся равносторонним.)

5. Начертите правильный треугольник и постройте две окружности: а) вписанную в него; б) описанную около него.

6. Начертите квадрат и постройте две окружности: а) вписанную в него; б) описанную около него.

7. Назовите многоугольник, который получится, если последовательно соединить отрезками взятые через одну вершины правильного: а) шестиугольника; б) восьмиугольника; в) двадцатиугольника.

8. Назовите многоугольник, который получится, если соединить последовательно отрезками середины сторон правильного: а) треугольника; б) четырехугольника; в) шестиугольника; г) двадцатиугольника.

9. Докажите, что вершины правильного шестиугольника, взятые через одну, являются вершинами правильного треугольника.

10. Докажите, что середины сторон правильного треугольника являются вершинами правильного треугольника.

11. Сторона правильного шестиугольника равна a. Найдите его бóльшую диагональ.

12. Сторона правильного восьмиугольника равна b. Найдите его большую диагональ.

13. Докажите, что в правильном шестиугольнике противолежащие стороны параллельны.

14. Докажите, что диагональ правильного пятиугольника параллельна одной из его сторон.

15*. Диагональ правильного пятиугольника $ABCDF$ равна d. Его стороны продолжены до пересечения друг с другом так, что получилась пятиконечная звезда. Найдите расстояние между двумя ее вершинами, лежащими на прямой AB.

§2. Длина окружности и площадь круга (3 ч.)

Комментарий для учителя

Содержание параграфа составляет материал, традиционный для любого курса планиметрии: формула длины окружности и формула площади круга.

Формальное определение длины окружности здесь не дается. Понятия длины окружности и площади круга вводятся с опорой на наглядные представления учащихся. При выводе формул длины окружности и площади круга неявно, на уровне наглядных представлений, совершается предельный переход от периметров правильных n-угольников к длине окружности и от площадей правильных вписанных и описанных n-угольников к площади круга.

При выводе формулы длины окружности необходимо сосредоточить внимание учащихся на том факте, что отношение длины окружности к ее диаметру есть величина постоянная (число π) и не зависит от выбранной окружности.

Текущие результаты изучения §2. Учащиеся должны научиться:

— объяснять понятия длины окружности и площади круга, опираясь на наглядные представления;

— понимать, что «отношение длины окружности к ее диаметру есть величина постоянная для всех окружностей»;

— выводить формулы длины окружности и площади круга;

— вычислять длину окружности, длину дуги окружности;

— вычислять площади круга, кругового сектора и кругового сегмента;

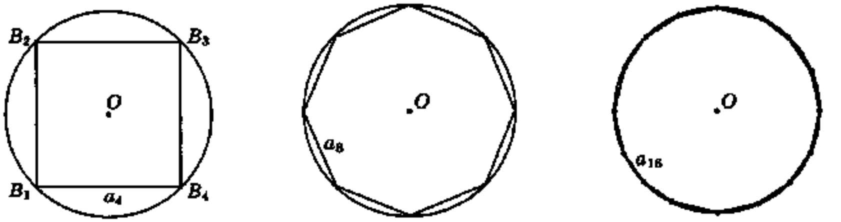
— применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- формулы длины окружности и длины дуги окружности;
- формулы площади круга, кругового сектора и кругового сегмента;
- алгебраический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Доказательство утверждения *«Отношение длины окружности к ее диаметру есть одно и то же число для всех окружностей»* проводится с опорой на промежуточный результат *«Периметры правильных n-угольников относятся, как радиусы описанных окружностей»* и неявный предельный переход от периметра правильных n-угольников. Чтобы показать учащимся, что длина окружности как угодно мало отличается от периметра вписанного в нее правильного многоугольника с большим числом сторон, можно использовать рисунок 313 из учебника либо заранее, если есть такая возможность, четко выполнить чертежи, на которых в окружности одного и того же радиуса вписаны правильные многоугольники при $n = 4; 8; 16$ (рис. 37). По этим рисункам на наглядном уровне учащиеся смогут проследить, как с увеличением числа сторон правильного вписанного многоугольника его периметр все меньше отличается от *длины окружности*.

После этого можно предложить учащимся следующее упражнение.



а) *б)* *в)*

Рис. 37

> Сравните периметры правильных n-угольников, вписанных в окружность, радиус которой равен 2 см, при $n = 4, 6, 12$.

После проведения доказательства утверждения *«Отношение длины окружности к ее диаметру есть одно и то же число для всех окружностей»* необходимо обратить внимание учащихся на то, что это число, равное $\frac{C}{2R}$, обозначается греческой буквой π и приблизительно равно 3,14. Именно существование этой константы позволяет вывести *формулу длины окружности* $C = 2\pi R$.

После вывода формулы *длины окружности* полезно в ходе устного решения задач 1102 и 1103 провести исследование зависимости *длины окружности* от изменения ее радиуса.

На формирование умения применять полученную формулу *длины окружности* можно предложить учащимся задачи 1104 б) и 1105 в).

В рабочей тетради следует предложить учащимся выполнить упражнение 70, которое аналогично приведенному выше упражнению. Затем записать утверждение об отношении длины окружности к ее диаметру и формулу длины окружности. Исследование зависимости длины окружности от изменения ее радиуса можно провести в ходе решения задач 71 и 72. На формирование умения применять полученную формулу длины окружности можно предложить учащимся задачи 73–76. Заметим, что задача 74 аналогична задаче 1104 б) из учебника.

2°. Вывод формулы *длины дуги окружности* основывается на том, что градусная мера всей окружности равна 360°. Поэтому, предложив учащимся составить пропорцию $\frac{360}{2\pi R}=\frac{\alpha}{l}$, получим формулу для вычисления *длины дуги окружности*.

После вывода формулы *длины дуги окружности* полезно в ходе решения задачи 3 из дополнительных задач методического пособия исследовать зависимость центрального угла дуги заданной длины окружности от изменения ее радиуса.

На формирование умения применять полученную формулу *длины дуги окружности* можно предложить учащимся устно по рисунку на доске выполнить задачу 1109.

На закрепление формул *длины окружности* и *длины дуги окружности* можно использовать задачу 4 из дополнительных задач методического пособия.

В рабочей тетради следует предложить записать учащимся формулу длины дуги окружности. *Исследование зависимости центрального угла* дуги заданной длины окружности *от изменения ее радиуса можно провести в ходе решения задачи 81, которая в дополнительных задачах методического пособия дана под номером 3. На формирование умения применять полученную формулу* длины дуги окружности *можно предложить учащимся задачи 77–80 и 82, причем упражнение 77 аналогично задаче 1109 из учебника, а задача 82 аналогична задаче 4 из дополнительных задач методического пособия.*

3°. Для того чтобы найти *площадь круга*, ограниченного окружностью радиуса R, надо вписать в эту окружность правильный многоугольник $D_1D_2D_3 \ldots D_n$, а в этот многоугольник вписать окружность радиуса r (рис. 38).

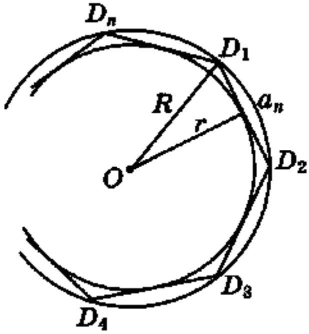


Рис. 38

Для того чтобы учащиеся лучше поняли обоснование формулы площади круга, полезно сделать краткую запись его на доске:

1. Дана окружность радиуса R. Площадь круга, ограниченного этой окружностью, равна S.

2. <u>Построение</u>: в эту окружность вписать правильный n-угольник $D_1D_2D_3 \ldots D_n$, площадь которого равна S_n. А в этот n-угольник вписать окружность радиуса r_n. Площадь круга, ограниченного этой окружностью, равна S'_n. Причем $S'_n < S_n < S$.

3. По формуле, выражающей радиус r_n окружности, вписанной в n-угольник, через радиус R окружности, в которую вписан n-угольник, $r_n = R\cos\dfrac{180°}{n}$.

4. Пусть $n \to \infty$, тогда $\cos\dfrac{180°}{n} \to 1$, а $r_n \to R$. Это означает, что вписанная и описанная окружности практически совпадают, а значит, совпадают и площади ограниченных ими кругов, т.е. $S'_n \to S_n \to S$.

5. $S_n = \dfrac{1}{2}P_nr_n$. Из пункта 4 следует: $r_n \to R$, а $P_n \to 2\pi R$, $S_n \to S$ при $n \to \infty$. Значит, $S_n = \dfrac{1}{2}P_nr_n \to \dfrac{1}{2}2\pi R\cdot R = \pi R^2$.

6. <u>Вывод:</u> $S_{круга} = \pi R^2$.

После вывода формулы *площади круга* полезно в ходе устного решения задачи 1115 провести исследование зависимости *площади круга* от изменения ее радиуса.

На формирование умения применять полученную формулу *площади круга* можно предложить учащимся задачи 1116 б) и 1117 б).

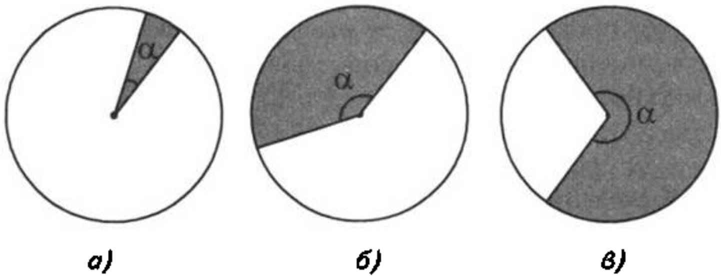


Рис. 39

4°. Определение *кругового сектора* полезно сопроводить рисунками, на которых изображены круговые секторы, ограниченные дугами с разными градусными мерами (рис. 39).

Как и при выводе формулы длины дуги окружности при выводе формулы сектора воспользуемся известным фактом, что градусная мера всей окружности равна 360°. Поэтому площадь сектора в 1° равна $\frac{1}{360}\pi R^2$. Затем делается вывод о *площади сектора*, соответствующего центральному углу α.

На закрепление формул *площади круга* и *площади кругового сектора* можно использовать задачу 5 из дополнительных задач методического пособия.

В рабочей тетради следует предложить записать учащимся формулу площади круга и площади сектора. На формирование умения применять полученные формулы можно предложить учащимся задачу 83, аналогичную задаче 5 из дополнительных задач методического пособия. На третьем уроке в классе полезно решить задачу 84.

5°. В самостоятельной работе первые две задачи — это задачи со свободным ответом и с выбором ответа. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задаче 3 решение записывается полностью.

Примерное планирование изучения материала

На <u>первом</u> уроке <u>в классе</u> — рассмотреть весь теоретический материал пункта 110, решить задачи 1102, 1103, 1104 б) и 1105 в), 1109; <u>дома</u> — вопросы 8–10 из вопросов для повторения к главе XII, задачи 1104 а), г) и д), 1105 а) и б), 1112 и 1113.

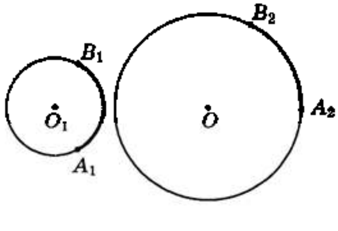
На <u>втором</u> уроке <u>в классе</u> — рассмотреть весь теоретический материал пунктов 111 и 112, решить задачи 1115, 1116 б), 1117 б), 1120 и 1126; <u>дома</u> — вопросы 11 и 12 из вопросов для повторения к главе XII, задачи 1116 а) и в), 1117 а) и в), 1124 и 1128.

На <u>третьем</u> уроке <u>в классе</u> — провести самостоятельную работу по теме "Длина окружности и площадь круга"; решить задачи 1101 (1 и 6 столбцы), 1106, 1111, 1114 (1 и 3 столбцы), 1125; дома — задачи 1101 (3 и 8 столбцы), 1107, 1114 (2 и 8 столбцы) и 1122.

Самостоятельная работа по теме «Длина окружности и площадь круга»

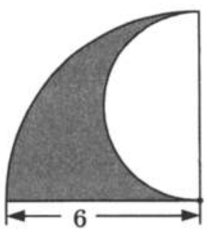
Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

1 вариант



1. Дуги A_1B_1 и A_2B_2 равной длины принадлежат разным окружностям с радиусами 3 см и 9 см. Найдите отношение градусных мер центральных углов, соответствующих этим дугам.

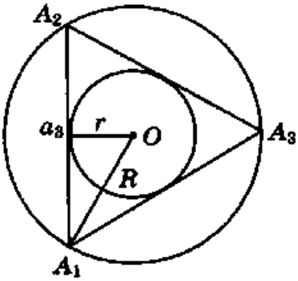
Ответ: ____________________



2. Найдите длину границы заштрихованной фигуры, используя данные рисунка.
1. $6\pi + 6$; 2. 12π; 3. 6π; 4. $3\pi + 6$.

Ответ: ____________________

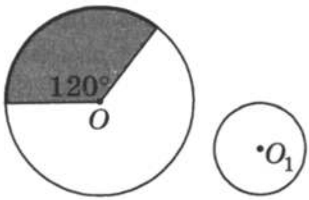
3. **Площадь кольца, образованного окружностью, описанной около правильного треугольника, и окружностью, вписанной в него, равна π. Найдите сторону треугольника.**



Ответ: ______________________

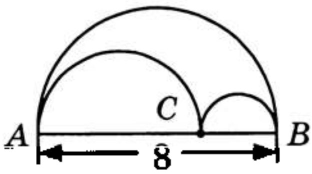
2 вариант

1. Выделенная на рисунке дуга окружности с центром в точке O соответствует центральному углу, равному 120°. Известно, что длина окружности с центром в точке O_1 равна длине этой дуги. Найдите отношение радиусов окружностей.



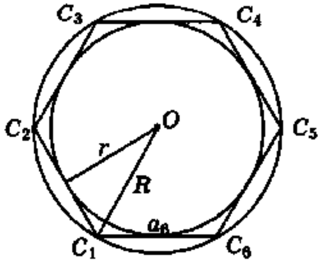
Ответ: ______________________

2. На отрезке AB, равном 8, отмечена точка C. Определите периметр фигуры, ограниченной полукругами с диаметрами AB, AC и BC.
1. 8π; 2. 24π; 3. 16π; 4. 4π.



Ответ: ______________________

3. **Площадь кольца, образованного окружностью, описанной около правильного шестиугольника, и окружностью, вписанной в него, равна π. Найдите сторону шестиугольника.**



Ответ: ______________________

Дополнительные задачи

1. Как изменится длина окружности, если радиус увеличится на: 1) 3 см; 2) 20 м; 3) a см?

2. Найдите отношение периметра правильного вписанного 24-угольника к диаметру описанной окружности радиуса 2 и сравните его с приближенным значением π.

3. Дуги A_1B_1 и A_2B_2 равной длины l принадлежат разным окружностям с радиусами R_1 и R_2. Найдите отношение градусных мер центральных углов, соответствующих этим дугам.

4. Найдите длину границы каждой из заштрихованных фигур, используя данные рисунков 40–45, если на них изображены части окружностей.

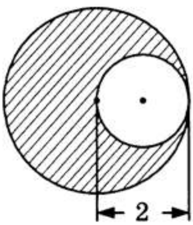


Рис. 40

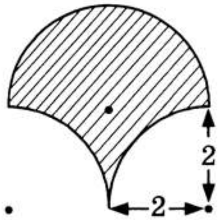


Рис. 41

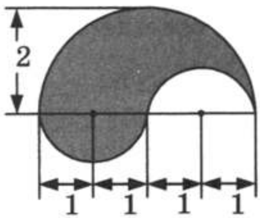


Рис. 42

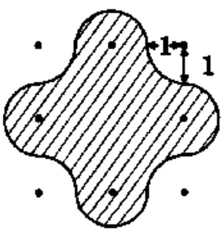


Рис. 43

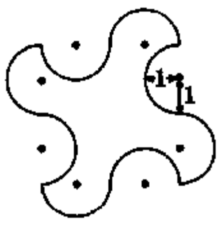


Рис. 44

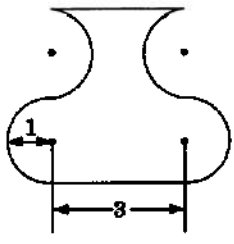


Рис. 45

5. Найдите площади заштрихованных фигур, используя данные рисунков 40–45.

Систематизация и обобщение знаний по теме «Длина окружности и площадь круга»

Комментарий для учителя

В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Длина окружности и площадь круга» учащиеся должны:

— вычислять длину окружности, длину дуги окружности;

— вычислять площади круга, кругового сектора и кругового сегмента;

— решать задачи на построение правильных многоугольников;

— применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- формулы, связывающие радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности со стороной правильного n-угольника;
- формулы длины окружности и длины дуги окружности;
- формулы площади круга, кругового сектора и кругового сегмента;
- алгебраический аппарат.

1°. Подготовку к контрольной работе по теме: «Длина окружности и площадь круга» полезно организовать как урок решения задач. Для этого можно использовать нерешенные задачи из учебника, в ходе решения которых провести повторение по материалу параграфа. Кроме того, можно подобрать задачи из дополнительных задач методического пособия, рекомендованные к соответствующим пунктам, в зависимости от уровня подготовки класса.

2°. В сборнике тестов Т.М. Мищенко, А.Д. Блинков «Геометрия. Тесты. 9 класс» к учебнику Л.С. Атанасян и др. издательства

«Просвещение» для главы XII «Длина окружности и площадь круга» рекомендованы тесты 7 и 8, направленные на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении данной темы. Каждый тест имеет четыре варианта, и их можно использовать при подготовке к контрольной работе.

Так как тесты не предполагают письменного оформления каждого задания, то можно устно выполнить один из вариантов, при этом полезно разобрать хотя бы одну из десятых задач, решение которой позволяет определить уровень сформированности умения применять изученные теоремы и требует достаточно высокой вычислительной культуры.

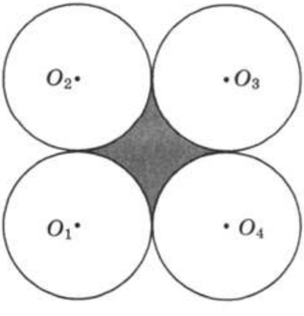
3°. В контрольной работе первые четыре задачи — это задачи с выбором ответа и со свободным ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задаче 5 решение записывается полностью с краткой записью условия и выполнением чертежа.

Контрольная работа по теме «Длина окружности. Площадь круга»

1 вариант

1. Определите центральный угол правильного n-угольника, если его сторона 6 см, а радиус вписанной окружности $3\sqrt{3}$ см.

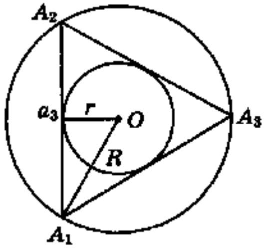
Ответ: ____________________



2. Четыре равные окружности попарно касаются внешним образом. Найдите площадь заштрихованной фигуры, если радиус каждой из окружностей равен 4 см.
1. 16π см^2; 2. 64π см^2;
3. $8(8-\pi)$ см^2; 4. $16(4-\pi)$ см^2.

Ответ: ____________________

3. **Найдите радиус окружности, описанной около правильного треугольника, если радиус вписанной в него окружности 3 см.**

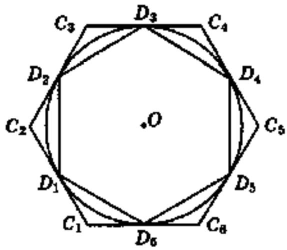


1. $6\sqrt{3}$ **см; 2.** $1{,}5$ **см;**

3. 6 **см; 4.** $3\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **см.**

Ответ: ______________________

4. **Найдите отношение стороны правильного шестиугольника, вписанного в окружность, к стороне правильного шестиугольника, описанного около нее.**



1. $\dfrac{1}{2}$**; 2.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$**; 3.** 2**; 4.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$**.**

Ответ: ______________________

5. **Определите, для каких правильных** ***n*-угольников сторона меньше радиуса описанной окружности.**

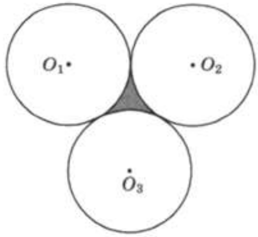
Ответ: ______________________

2 вариант

1. **Определите центральный угол правильного** ***n*-угольника, если его сторона 2 см, а радиус описанной окружности** $\sqrt{2}$ **см.**

Ответ: ______________________

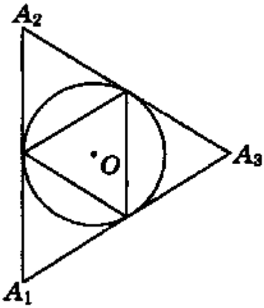
2. Три равные окружности попарно касаются внешним образом. Найдите площадь заштрихованной фигуры, если радиус каждой из окружностей равен 4 см.



1. $8(2\sqrt{3} - \pi)$ см^2; 2. $16(\sqrt{3} - \pi)$ см^2;

3. $16(2\sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\pi)$ см^2; 4. $8(4\sqrt{3} - \pi)$ см^2.

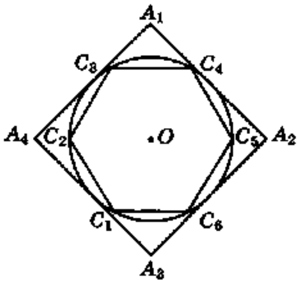
Ответ: ______________________



3. Найдите отношение стороны правильного треугольника, описанного около окружности, к стороне правильного треугольника, вписанного в нее.

1. $\frac{1}{2}$; 2. $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 3. 2; 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: ____________________



4. Найдите сторону квадрата, описанного около окружности, если сторона правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность, равна 3 см.
1. 4,5 см; 2. 6 см;
3. $3\sqrt{3}$ см; 4. $3\sqrt{2}$ см.

Ответ: ____________________

5. Для каких правильных n-угольников половина стороны не меньше, чем радиус вписанной окружности?

Ответ: ____________________

ГЛАВА XIII

Движения (10 ч.)

Комментарий для учителя

В этой главе вводятся понятия отображения плоскости на себя и движения, а также рассматриваются основные виды движений: осевая и центральная симметрии, параллельный перенос и поворот.

Прн изучении данного курса планиметрии неоднократно использовалось понятие наложения, опираясь на которое в данном курсе вводилось понятие равенства фигур. На интуитивном уровне в пункте 5 было дано объяснение, что наложение — это отображение плоскости на себя, без введения термина *отображение плоскости на себя*. В данной главе изучается преобразование движения, которое определяется как отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния между точками. Понятие движения важно прежде всего тем, что, опираясь на него, можно ввести общее понятие равенства геометрических фигур. Отсюда возникает вопрос о связи понятий наложения и движения. В пункте 119 доказана эквивалентность этих понятий. Однако этот пункт сложен для восприятия основной частью учащихся, а потому даже по авторскому подходу к данному вопросу он не является обязательным.

Понятие отображения плоскости на себя как основы для введения понятия движения рассматривается в данной главе на интуитивном уровне с привлечением уже известных учащимся понятий осевой и центральной симметрий. Поскольку в дальнейшем движения не применяются в качестве аппарата для решения задач и изложения теории, можно рекомендовать изучение материала в ознакомительном порядке, то есть не требовать от учащихся воспроизведения доказательств. Однако основные понятия — симметрия относительно точки и прямой, параллельный перенос и поворот — учащиеся должны усвоить на уровне практических применений, то есть основное внимание следует уделить отработке навыков построения образов точек, отрезков, треугольников при симметриях, параллельном переносе, повороте. Понятия осевой и центральной симметрий были введены в главе V, поэтому здесь необходимо их повторить.

Планируемые итоговые результаты изучения главы XIII:

Учащиеся должны научиться:

— изображать и распознавать на чертежах и рисунках: симметричные фигуры; фигуры, полученные параллельным переносом, и фигуры, полученные поворотом;

— определять вид движения по рисунку;

— иллюстрировать и объяснять понятия: *отображение плоскости на себя*, *движения* и его свойства;

— понимать, что *осевая и центральная симметрии*, *параллельный перенос* и *поворот* являются *движением*;

— понимать, что *при движении любая фигура переводится в равную ей*;

— формулировать, иллюстрировать и объяснять формулировки параллельного переноса и поворота;

— решать несложные задачи на преобразование плоскости, применяя определения понятий симметрий, поворота, параллельного переноса.

§1. Понятие движения (2 ч.)

Комментарий для учителя

Вводимые в данном параграфе понятие отображения плоскости на себя и определение движения в дальнейшем не применяются, поэтому при проверке домашнего задания можно не требовать от учащихся воспроизведения доказательств. Формой проведения урока можно рекомендовать рассказ учителя с некоторым привлечением учащихся.

Текущие результаты изучения §1. Учащиеся должны научиться:

— иллюстрировать и объяснять понятие *отображение плоскости на себя*;

— иллюстрировать и объяснять понятие *движения* и его свойства;

— понимать, что *осевая и центральная симметрии* являются *движением*;

— понимать, что *при движении любая фигура переводится в равную ей*;

— решать несложные задачи на преобразование плоскости, применяя определения понятий симметрий, поворота, параллельного переноса;

— определять в какие фигуры переводятся *отрезки и треугольники при движении*.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. В VIII классе в пункте 48 были введены понятия осевой и центральной симметрии как геометрических фигур. Поскольку понятие отображения плоскости на себя рассматривается здесь с привлечением уже известных учащимся понятий осевой и центральной симметрий, необходимо их повторить в процессе выполнения упражнений типа:

1. Нарисуйте несколько треугольников, обладающих осевой симметрией.
2. Какой треугольник имеет три оси симметрии?
3. Нарисуйте несколько четырехугольников, обладающих центральной симметрией.
4. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла, является его осью симметрии.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать по рисункам задачи 87 формулировки определений видов движений плоскости по ходу их изучения. Затем в процессе решения задач 86–89 повторить понятия осевой и центральной симметрий, которые являются полным аналогом предложенных выше задач.

2°. При введении понятия *отображение плоскости на себя* следует заметить, что если, во-первых, указан способ, с помощью которого каждой точке A плоскости ставится в соответствие некоторая точка A', и, во-вторых, каждая точка плоскости оказывается поставленной в соответствие какой-то точке плоскости, то мы будем говорить, что задано *отображение плоскости на себя.* Объяснение понятия *отображение плоскости на себя* проводится на примерах осевой и центральной симметрий, известных учащимся из темы «*Четырехугольники*».

3°. Изучение свойства осевой симметрии «*Осевая симметрия — это отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояния между точками*» начинается с его формулировки и выполнения рисунка 46. Определенные трудности у учащихся может вызвать краткая запись условия и заключения теоремы о свойстве осевой симметрии. Проанализируем формулировку свойства осевой симметрии. Пусть M и N — две произвольные точки плоскости, а M_1 и N_1 — симметричные им точки *относительно прямой* l. Так как в условии дано *преобразование симметрии относительно прямой* l, значит, $MM_1 \perp l$ и $NN_1 \perp l$, $AM_1 = AM$ и $BN_1 = BN$. Выполним краткую запись:

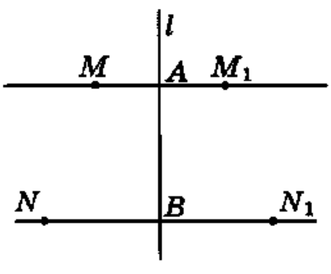


Рис. 46

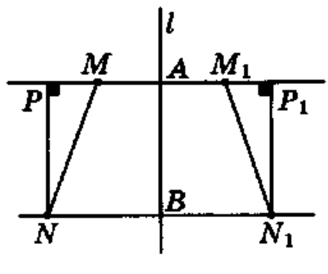


Рис. 47

Дано: Прямая l — ось симметрии;
$M \to M_1$, $N \to N_1$;
$MM_1 \perp l$, $NN_1 \perp l$;
$AM_1 = AM$, $BN_1 = BN$.

Доказать: $MN = M_1N_1$.

Доказательство:

1. Выполняем дополнительные построения: проводим из точек N и N_1 к прямой MM_1 перпендикуляры NP и N_1P_1 (рис. 47).

2. Треугольники MNP и $M_1N_1P_1$ — прямоугольные по построению, так как NP и N_1P_1 перпендикуляры прямой MM_1.

Отрезки NP и N_1P_1 равны как расстояния между параллельными прямыми ($MM_1 \parallel NN_1$, так как $MM_1 \perp l$ и $NN_1 \perp l$).

Четырехугольник NPP_1N_1 — прямоугольник по построению, так как NP и N_1P_1 перпендикуляры прямой MM_1. Отрезки PP_1 и NN_1 равны как противоположные стороны прямоугольника.

Отрезки $AM_1 = AM$ равны по условию. Следовательно, $MP = M_1P_1$ в силу свойства измерения отрезков.

Отсюда $\Delta MNP = \Delta M_1N_1P_1$.

3. Из равенства прямоугольных треугольников MNP и $M_1N_1P_1$ следует равенство их гипотенуз MN и M_1N_1. Таким образом, доказано, что при осевой симметрии расстояния между точками сохраняются, следовательно, осевая симметрия есть *отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояния между точками*.

После доказательства теоремы о свойстве осевой симметрии можно выделить в ее обосновании четыре этапа.

1. Формулировка условия и заключения теоремы.

2. Дополнительные построения.

3. Доказательство равенства прямоугольных треугольников MNP и $M_1N_1P_1$.

4. Вывод о равенстве отрезков MN и M_1N_1 в силу свойства измерения отрезков.

На прямое применение свойства осевой симметрии можно предложить следующее упражнение:

> Точки A и B при симметрии относительно прямой n переходят в точки A' и B'. Чему равна длина отрезка $A'B'$, если отрезок AB равен 3,5 см?

После доказательства свойства осевой симметрии полезно провести исследование других возможных расположений точек M, N, M_1 и N_1, предложенных в учебнике.

1. Если точки M и N лежат на прямой, перпендикулярной оси симметрии l, то отрезки MN и M_1N_1 равны в силу свойства изме-

рения отрезков, так как по условию $AM_1 = AM$ и $AN_1 = AN$ (рис. 48). Отсюда следует решение задачи 1148 б).

Рис. 48

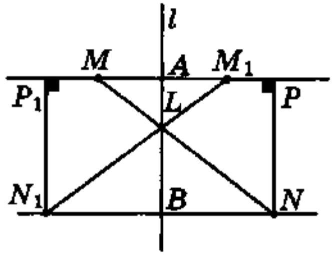


Рис. 49

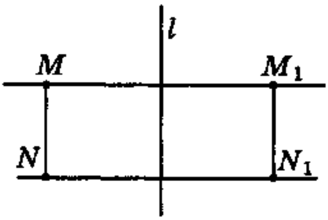


Рис. 50

2. Пусть точки M и N лежат в разных полуплоскостях относительно оси симметрии.

Выполняем дополнительные построения: проводим из точек N и N_1 к прямой MM_1 перпендикуляры NP и N_1P_1 (рис. 49).

Доказательство равенства прямоугольных треугольников MNP и $M_1N_1P_1$ проводится аналогично доказательству, приведенному выше. Из равенства прямоугольных треугольников MNP и $M_1N_1P_1$ следует равенство их гипотенуз MN и M_1N_1.

3. Пусть точки M и N лежат на прямой, параллельной оси симметрии l (рис. 50). Четырехугольник NMM_1N_1 — прямоугольник по построению, так как в условии дано преобразование осевой симметрии относительно прямой l. Отрезки MM_1 и NN_1 равны как противоположные стороны прямоугольника.

4°. При введении определения *движения плоскости* основное внимание необходимо направить на понимание определения. Другими словами, если в условии или заключении сказано: «*движение плоскости* ...», то учащиеся должны понимать, что: во-первых, «*движение плоскости* — это *отображение плоскости на себя* ...», то есть указан способ, с помощью которого каждой точке A плоскости ставится в соответствие некоторая точка A' и при этом каждая точка плоскости оказывается поставленной в соответствие какой-то точке плоскости; и, во-вторых, это *«отображение плоскости на себя сохраняет расстояния между точками ...»*, то есть если точкам A и B ставятся в соответствие точки A_1 и B_1, то выполняется равенство $A_1B_1 = AB$.

Для того чтобы проверить правильность усвоения определения, можно предложить упражнение:

> Точки A и B при движении переходят в точки A' и B'. Чему равно расстояние между точками A' и B', если $AB = 6$ см?

Полезно также привести контрпримеры, т.е. задать такое преобразование плоскости, которое не является движением. Для этого можно предложить упражнения 1 и 2 из дополнительных задач методического пособия.

В задаче 1 преобразование плоскости не является отображением плоскости на себя, т.е. не выполняется первое условие.

В задаче 2 преобразование плоскости не сохраняет расстояние между точками, т.е. не выполняется второе условие.

На закрепление понятия *движение плоскости* с использованием понятия *осевой симметрии* можно предложить учащимся выполнить следующее задание.

> Треугольник ABD равносторонний. Постройте точку C, симметричную точке A относительно стороны BD, и докажите, что четырехугольник $ABCD$ — ромб.

> *В рабочей тетради следует предложить учащимся решить задачу 94, которая является полным аналогом предложенной выше задачи.*

5°. Доказательство свойства центральной симметрии начинается с его формулировки *«Центральная симметрия плоскости является движением»* и выполнения рисунка 51. Проанализируем формулировку свойства центральной симметрии. Пусть M и N — две произвольные точки плоскости, а M_1 и N_1 — симметричные им точки относительно точки O. Так как в условии дано преобразование симметрии относительно точки O, значит, $OM_1 = OM$ и $ON_1 = ON$. Выполним краткую запись:

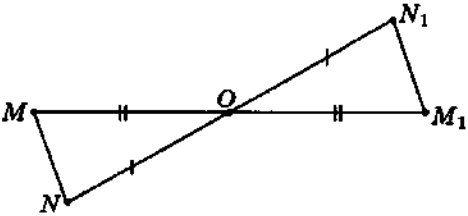


Рис. 51

Дано: O — центр симметрии;
$M \to M_1$, $N \to N_1$;
$OM_1 = OM$, $ON_1 = ON$.

Доказать: $MN = M_1N_1$.

Конфигурация, получившаяся на рисунке, хорошо знакома учащимся: два отрезка, пересекающиеся в середине. Теперь доказательство свойства центральной симметрии, записанное в заключении теоремы ($MN = M_1N_1$), со ссылкой на первый признак равенства треугольника учащиеся могут провести самостоятельно.

На прямое применение теоремы можно предложить следующие упражнения:

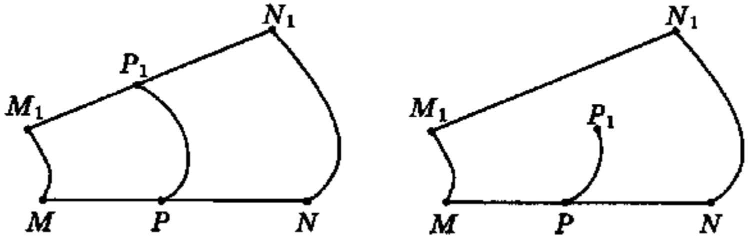
> Точки A и B при симметрии относительно точки O переходят в точки A' и B'. Чему равна длина отрезка $A'B'$, если отрезок $AB = 5$ см?

На закрепление понятия *движения плоскости* с использованием понятия *центральной симметрии* можно предложить учащимся выполнить следующие задания.

> Точка F — середина стороны AC в треугольнике ABC. Постройте точку D, симметричную точке B относительно точки F, и докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.
> Нарисуйте равносторонний треугольник ABC. Постройте треугольник A_1B_1C, симметричный данному относительно вершины C. Докажите, что точки ABA_1B_1 являются вершинами прямоугольника.

> *В рабочей тетради следует предложить учащимся решить задачи **95** и **96**, которые являются полным аналогом предложенной выше задачи.*

6°. Изучение теоремы начинается с анализа формулировки *«При движении отрезок отображается на отрезок»*. Сначала обратим внимание учащихся на то, что в условии сказано: *«При движении ...»*, а это значит, надо доказать, во-первых, что каждая точка P данного отрезка MN отображается в некоторую точку P_1 отрезка M_1N_1 и, во-вторых, что в каждую точку P_1 отрезка M_1N_1 переходит какая-то точка P данного отрезка MN.



<u>Первая часть.</u> Пусть точки M и N — концы отрезка MN движением переводятся в точки M_1 и N_1, а точка P, принадлежащая отрезку MN, переходит в некоторую точку P_1. По определению движения $M_1N_1 = MN$, $NP = N_1P_1$ и $MP = M_1P_1$. Затем, выделив в формулировке теоремы условие ($M \in MN$ и $N \in MN$ и $P \in MN$, $MP + NP = MN$, $M \to M_1$, $N \to N_1$ и $P \to P_1$; $M_1N_1 = MN$, $NP = N_1P_1$ и $MP = M_1P_1$) и заключение ($P_1 \in M_1N_1$, $M_1P_1 + N_1P_1 = M_1N_1$), выполним краткую запись:

Дано: $M \in MN, N \in MN, P \in MN;$

$MP + NP = MN;$

$M \to M_1, N \to N_1, P \to P_1;$

$M_1N_1 = MN, NP = N_1P_1, MP = M_1P_1.$

Доказать: $P_1 \in M_1N_1; M_1P_1 + N_1P_1 = M_1N_1.$

После этого можно воспроизвести доказательство из учебника. Предположение о том, что точка P_1 не принадлежит отрезку M_1N_1, полезно проиллюстрировать на рисунке, из которого видно, что точки M_1, N_1 и P_1 являются вершинами треугольника $M_1N_1P_1$.

Доказательство <u>второй части</u> аналогично, и его можно предложить учащимся разобрать по тексту учебника самостоятельно.

7°. Из теоремы «При движении отрезок отображается на отрезок» следует, что:

1. *«При движении прямая отображается на прямую»*,

2. *«При движении полупрямая отображается на полупрямую»*,

3. *«При движении угол отображается на равный ему угол»*.

Справедливость первого следствия следует из того, что три точки одной прямой переходят в три точки, лежащие на другой прямой. Для доказательства второго следствия очень важно, что точки переходят в определенном порядке. Доказательство третьего следствия рассматривается при решении задачи 1150 учебника.

8°. Программой не предусмотрено углубленное изучение темы «Движения плоскости». Поэтому пункт 119*, который по авторскому замыслу не является обязательным, может быть в том или ином объеме изложен учителем в зависимости от уровня подготовки класса и наличия времени. При этом учащиеся должны понять, что преобразования плоскости: наложения и движения — эквивалентны, а значит, при движении любая фигура переходит в равную ей фигуру. В процессе проверки домашнего задания следует ограничиться проверкой решения задач и знания формулировок определений, утверждений и теорем, умений на наглядном уровне объяснить введенные термины. Задачи, отмеченные звездочкой (*), относятся к пункту 119*, поэтому их решение возможно только при изучении пункта 119*.

9°. В самостоятельной работе «Правильные многоугольники» первые две задачи — это задачи со свободным ответом или с выбором ответа. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задаче 3 решение записывается полностью.

Примерное планирование изучения материала

На <u>первом</u> уроке <u>в классе</u> — рассмотреть весь теоретический материал пунктов 117 и 118, решить задачи 1148 б), 1150, 1151; <u>дома</u> — вопросы 1–8 из вопросов для повторения к главе XIII, задачи 1148 а), 1149 б), 1153.

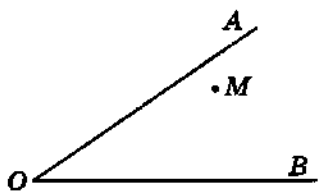
На <u>втором</u> уроке <u>в классе</u> — провести самостоятельную работу по теме «Движения»; решить задачи 1152 а), б), г), 1158, 1159; <u>дома</u> — задачи 1152 в), д), 1160, 1161.

Самостоятельная работа по теме «Движения»

Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

1 вариант

1. Внутри угла AOB, равного 40°, отмечена точка M. Точки M_1 и M_2 симметричны точке M относительно сторон угла. Найдите градусную меру угла M_1OM_2.



Ответ: ____________________

2. а) Окружность с центром в точке O_1 симметрична окружности с центром в точке O относительно прямой a. Радиус окружности с центром в точке O равен 3 см, а расстояние от центра окружности с центром в точке O_1 до прямой a равно 5 см. Найдите расстояние между центрами окружностей.

Ответ: ____________________

б) Определите взаимное расположение окружности с центром в точке O и прямой a.

а) Прямая a не пересекает окружность с центром в точке O;

б) Прямая a пересекает окружность с центром в точке O;

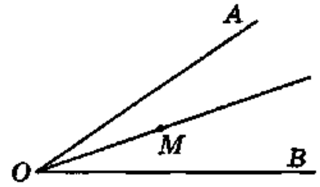
в) Прямая a касается окружности с центром в точке O.

Ответ: ____________________

3. Треугольник ABD равносторонний. Постройте точку C, симметричную точке A относительно стороны BD, и определите вид четырехугольника $ABCD$.

2 вариант

1. **На биссектрисе угла AOB, равного 40°, отмечена точка M. Точка M_1 симметрична точке M относительно стороны OA. Найдите градусную меру угла MOM_1.**



Ответ: ____________________

2. **а) Окружность с центром в точке O_1 симметрична окружности с центром в точке O относительно прямой a. Радиус окружности с центром в точке O равен 3 см, а расстояние от центра окружности с центром в точке O_1 до прямой a равно 3 см. Найдите расстояние между центрами окружностей.**

Ответ: ____________________

б) Определите взаимное расположение окружности с центром O и прямой a.

а) Прямая a не пересекает окружность с центром O;

б) Прямая a пересекает окружность с центром O;

в) Прямая a касается окружности с центром O.

3. **Точка F — середина стороны AC в треугольнике ABC. Постройте точку D, симметричную точке B относительно точки F, и определите вид четырехугольника $ABCD$.**

Указания к задачам

1148. Внесем обозначения на рисунке 52: l— ось симметрии, a — данная прямая, a_1 — прямая, на которую отображается прямая a.

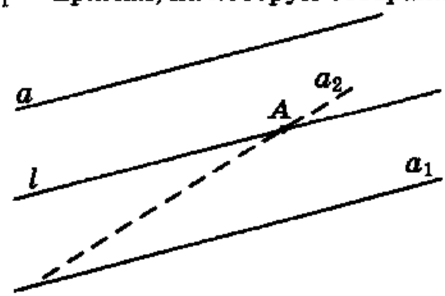


Рис. 52

а) По условию задачи $a \parallel l$. При доказательстве воспользуемся методом от противного. Предположим, что прямые l и a_1 не параллельны. Значит, они пересекаются в некоторой точке A. Так как $A \in l$, то точка A отображается сама на себя, и, следовательно, прямые a и l пересекаются в точке A, что противоречит условию $a \parallel l$. Следовательно, $a_1 \parallel l$.

1149. Пусть точка O — центр симметрии, a — данная прямая, a_1 — прямая, на которую отображается прямая a.

а) При доказательстве воспользуемся методом от противного. Предположим, что прямые a и a_1 не параллельны. Значит, они пересекаются в некоторой точке A. Отсюда возможны два варианта.

1. При центральной симметрии точка A отображается сама на себя, и тогда она является центром симметрии, что противоречит условию: точка O — центр симметрии.

2. При центральной симметрии точка A отображается в некоторую точку A_1, которая так же, как и точка A, принадлежит как прямой a, так и прямой a_1. Следовательно, прямые a и a_1 имеют две общие точки и, следовательно, совпадают. А это значит, что точка O — центр симметрии, лежит на прямой a, что противоречит условию.

1151. Пусть a и b — данные прямые, a_1 и b_1 — прямые, на которые отображаются прямые a и b. По условию задачи $a \parallel b$. При доказательстве воспользуемся методом от противного. Предположим, что прямые a_1 и b_1 не параллельны. Значит, они пересекаются в некоторой точке A_1. Но тогда существует точка A, которая при данном движении переходит в точку A_1. А значит, точка A принадлежит как прямой a, так и прямой b, что противоречит условию задачи $a \parallel b$.

1152. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, а A_1, B_1, C_1 и D_1 — точки, в которые отображаются вершины данного четырехугольника. Так как при движении отрезок отображается на отрезок, то четырехугольник $ABCD$ отображается на четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$.

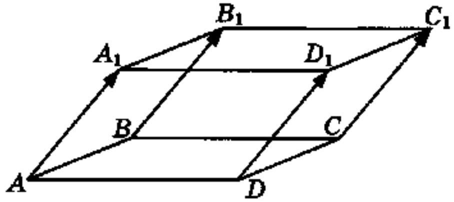


Рис. 53

а) По условию задачи четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, значит, $AB \| CD$, $BC \| DA$. В силу результата решения задачи 1151 $A_1B_1 \| C_1D_1$, $B_1C_1 \| D_1A_1$. Следовательно, $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм (рис. 53).

б) По условию задачи четырехугольник $ABCD$ — трапеция с основаниями AB и CD, значит, $AB \| CD$ и $AB \neq CD$. В силу результата решения задачи 1151 $A_1B_1 \| C_1D_1$ и $A_1B_1 \neq C_1D_1$. Следовательно, $A_1B_1C_1D_1$ — трапеция.

в) Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — ромб в силу утверждения, что равные отрезки при движении отображаются на равные отрезки и что параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

г) Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник в силу утверждения, что углы при движении отображаются на равные углы и что параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

д) Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат в силу утверждения, что углы при движении отображаются на равные углы, равные отрезки при движении отображаются на равные отрезки и что параллельные прямые отображаются на параллельные прямые.

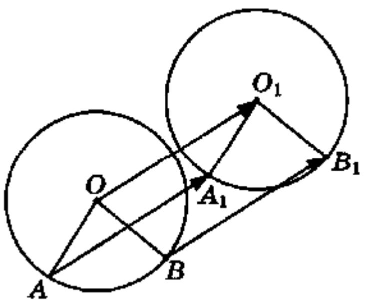


Рис. 54

1153. Пусть точка O — центр данной окружности, точка O_1 — точка, на которую отображается центр данной окружности (рис. 54). Возьмем на данной окружности две произвольные точки A и B ($OA = OB = R$). Построим точки A_1 и B_1, в которые переходят точки A и B при движении. В силу утверждения, что равные отрезки при движении отображаются на равные отрезки $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$. Так как $OA = OB = R$, следовательно, $O_1A_1 = O_1B_1 = R$.

1154*. По условию задачи при данном отображении каждая точка плоскости отображается на себя. Значит, отображение сохраняет расстояния, поэтому оно является движением. По утверждению, что движение — это наложение (пункт 119), данное отображение является наложением.

1155*. При доказательстве воспользуемся методом от противного. Предположим, что существуют различные движения, при которых точки A, B и C отображаются на точки A_1, B_1 и C_1. Тогда найдется такая точка M, которая при одном движении отображается на точку M_1, а при другом движении — на точку M_2, отличную от точки M_1. Аналогично доказательству утверждения, движение — это наложение (пункт 119), доказывается, что $A_1M_1 = A_2M_2$, $B_1M_1 = B_2M_2$, $C_1M_1 = C_2M_2$. Отсюда следует, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку M_1M_2. Но это невозможно, так как $A_1B_1C_1$ — треугольник.

1157. Решение данной задачи позволяет обсудить очень важный вопрос о методе ее решения. Основная часть учащихся считает, что достаточно дважды применить признаки равенства треугольников: первый — треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $BD = B_1D_1$; а затем третий: треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равны по трем сторонам, тогда равенство параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ будет доказано. Однако это не так!

По определению равенства фигур: «*Две фигуры называются равными, если их можно совместить наложением*», а наложение есть движение, поэтому необходимо найти такое движение, при котором параллелограмм $ABCD$ отображается на параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$. Для этого сначала докажем, что треугольники ABD и

$A_1B_1D_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. В силу следствия *«Треугольник отображается на равный ему треугольник»* (пункт 118) существует движение, при котором точки A, B и D отображаются в точки A_1, B_1 и D_1. Далее, в силу результата решения задачи 1151, существует движение, при котором параллельные прямые отображаются на параллельные прямые, а значит, при этом движении точка пересечения прямых BC и DC отображается в точку пересечения прямых B_1C_1 и D_1C_1.

Дополнительные задачи

1. Дана некоторая прямая. Поставим каждой точке плоскости в соответствие ее проекцию на эту прямую. Является ли данное преобразование плоскости движением?

2. На плоскости отмечена точка O. Через точку O и каждую точку плоскости X проведем луч OX и отложим на этом луче точку X' так, что $OX' = 2OX$. Является ли данное преобразование плоскости движением?

3. Дана точка O. 1. Постройте точку A', симметричную точке A относительно точки O. 2. Какая точка симметрична точке A' относительно точки O?

4. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Назовите точку, симметричную точке A (B, C и D) относительно точки O.

5. Точки A, B, и C, не лежащие на одной прямой, переходят при симметрии относительно точки O соответственно в точки; A', B' и C'. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

6. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AC. Точка B' симметрична B относительно точки D. Докажите, что четырехугольник $ABCB'$ — параллелограмм.

§2. Параллельный перенос и поворот (4 ч.)

Комментарий для учителя

Изучение вводимых в данном параграфе понятий параллельного переноса и поворота рекомендуется в ознакомительном порядке, то есть не обязательно требовать от учащихся воспроизведения доказательств. Формой проведения урока можно рекомендовать лекцию.

Текущие результаты изучения §2. Учащиеся должны научиться:

— изображать и распознавать на чертежах и рисунках: фигуры, полученные параллельным переносом, и фигуры, полученные поворотом;

— определять вид движения;

— понимать, что *параллельный перенос* и *поворот* являются *движением*;

— формулировать, иллюстрировать и объяснять формулировки параллельного переноса и поворота;

— изображать, обозначать и распознавать на рисунке точки и простейшие фигуры, в которые переходят данные точки и фигуры при *параллельном переносе* и *повороте*;

— решать несложные задачи на преобразование плоскости, применяя определения понятий симметрий, поворота, параллельного переноса.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. При введении определения *параллельный перенос* полезно воспользоваться рисунком 55. Понятие *параллельный перенос* вводится конструктивно, тем самым задается правило построения точки, в которую переходит данная точка при *параллельном переносе*.

Чтобы построить точку B, в которую отображается точка A, необходимо провести через точку A прямую, параллельную вектору $\vec{a}$, а затем от точки A в направлении, заданном вектором $\vec{a}$, отложить отрезок AB, длина которого равна модулю вектора $\vec{a}$ (рис. 55).

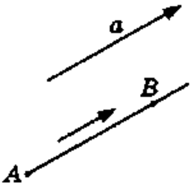


Рис. 55

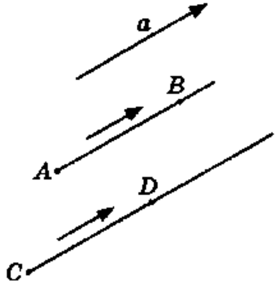


Рис. 56

Таким образом, из определения параллельного переноса можно сделать вывод: «при параллельном переносе точки смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние».

2°. Доказательство утверждения «*Параллельный перенос является движением*» должно состоять из двух частей: во-первых, необходимо указать способ, с помощью которого каждой точке A плоскости *при параллельном переносе* ставится в соответствие некоторая точка A' и при этом каждая точка плоскости оказывается поставленной в соответствие какой-то точке плоскости; и, во-вторых, что *при параллельном переносе*, если точкам A и C ставятся в соответствие точки B и D, то выполняется равенство $CD = AB$ (рис. 56).

Доказательство первой части утверждения следует из определения *параллельного переноса*.

Для доказательства второй части утверждения проанализируем формулировку «*Параллельный перенос является движением*». Пусть A и C — две произвольные точки плоскости, а A и B — точки, в которые они отображается (рис. 57). Так как в условии дано преобразование *параллельный перенос*, по определению *параллельного переноса* $CD = AB = |\vec{a}|$ и $CD \parallel AB \parallel \vec{a}$. Выполним краткую запись:

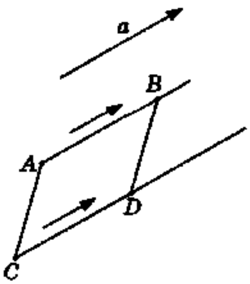


Рис. 57

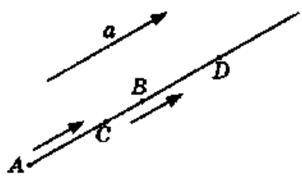


Рис. 58

Дано: $\vec{a}$ — вектор,
$A \to C, B \to D$;
$CD = AB = |\vec{a}|$
$CD \parallel AB \parallel \vec{a}$.

Доказать: $CD = AB$.

Соединим точку A с точкой C и точку B с точкой D. Четырехугольник $ACDB$ — параллелограмм, так как по условию $CD = AB$ и $CD \parallel AB$.

После этого можно воспроизвести доказательство из учебника.

В приведенном доказательстве предполагалось, что точка C не лежит на прямой AB. Если же точка B принадлежит прямой AB (рис. 58), то точки A и C также смещаются на одно и то же расстояние ($CD = AB = |\vec{a}|$) по одной и той же прямой в одном и том же направлении. Докажем это. Так как точка C лежит на прямой AB, значит, она лежит на прямой, параллельной вектору $\vec{a}$, и смещается по прямой, параллельной вектору $\vec{a}$. Следовательно, по аксиоме о параллельных прямых точка D лежит на этой же прямой. Равенство отрезков ($CD = AB$) определяется по формуле длины отрезка.

3°. В замечании, сделанном в учебнике, говорится, что при *параллельном переносе* точки сдвигаются на одно и то же расстояние. Поэтому можно представить, что вся плоскость сдвигается на одно и то же расстояние в одном и том же направлении. А значит, и любая фигура F, заданная на плоскости, будет сдвигаться на одно и то же расстояние в одном и том же направлении. Так как *параллельный перенос — движение*, и при этом вся плоскость сдвигается на одно и то же расстояние в одном и том же направлении, значит, при *параллельном переносе* прямая отображается на параллельную ей прямую или сама на себя.

4°. В пункте 121 рассматривается еще одно преобразование плоскости: поворот около данной точки O. В определении поворота необходимо выделить два его признака:

1) поворот является движением;

2) каждый луч с началом в данной точке поворачивается на один и тот же угол в одном и том же направлении. Следует также отметить, что точка O переходит сама в себя.

Доказательство утверждения *«Поворот является движением»* аналогично доказательству утверждения *«Параллельный перенос является движением»*. Поэтому этот материал можно предложить учащимся для самостоятельной работы по учебнику, а затем следует его обсудить. Если подготовка класса недостаточна для такой работы, то можно порекомендовать формой работы с классом избрать лекцию.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пунктов 120 и 121, разобрать по тексту учебника решение задачи 1171, решить задачи 1162, 1165, 1166 и 1168; дома — вопросы: 14–17 из вопросов для повторения к главе XIII; задачи 1163, 1164, 1169, 1070.

Систематизация и обобщение знаний по теме «Движения»

Комментарий для учителя

1. В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Движения» учащиеся должны:

— изображать и распознавать на чертежах и рисунках: симметричные фигуры; фигуры, полученные параллельным переносом, и фигуры, полученные поворотом;

— определять вид движения;

— решать несложные задачи на преобразование плоскости, применяя определения понятий симметрий, поворота, параллельного переноса.

2. Подготовку к контрольной работе по теме: «Движения» полезно организовать как урок решения задач. Для этого можно использовать нерешенные задачи из учебника, в ходе решения которых провести повторение по материалу параграфа. Кроме того, можно подобрать задачи из дополнительных задач методического

пособия, рекомендованные к соответствующим пунктам, в зависимости от уровня подготовки класса.

В сборнике тестов Т.М. Мищенко, А.Д. Блинков «Геометрия. Тесты. 9 класс» к учебнику Л.С. Атанасян и др. издательства «Просвещение» для главы XIII «Движения» рекомендован тест 9, направленный на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении данной темы. Каждый тест имеет четыре варианта, и его можно использовать при подготовке к контрольной работе.

Так как тесты не предполагают письменного оформления каждого задания, то можно устно выполнить один из вариантов, при этом полезно разобрать хотя бы одну из десятых задач, решение которой позволяет определить уровень сформированности умения применять изученные теоремы и требует достаточно высокой вычислительной культуры.

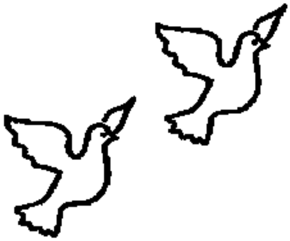
3. При подготовке к итоговой контрольной работе при проведении повторения, используя весь оставшийся резерв времени, следует оставить один урок для разбора решений итоговой работы. Задания для повторения можно брать из учебника, используя либо не решенные в процессе обучения, либо наиболее важные задания каждой темы. Кроме того, учитель может создать свой набор задач для повторения в зависимости от уровня подготовки класса.

4. В контрольной работе первая задача — это задача с выбором ответа, следующие четыре задачи — это задачи со свободным ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задачах 2, 4 и 5 ответ обязательно должен содержать рисунок. В задаче 6 решение записывается полностью, без выполнения краткой записи условия, чертеж выполняется по усмотрению учащегося.

Контрольная работа по теме «Движения»

1 вариант

1. Определите по рисунку вид движения, при котором одна фигура переходит в другую. Укажите на рисунке, как оно может быть задано.



1. центральная симметрия (указать центр);
2. поворот (указать угол и направление);
3. осевая симметрия (указать ось);
4. параллельный перенос (указать вектор).

2. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC. Определите, какая получится фигура при симметрии данного треугольника относительно прямой, содержащей его катет. Сделайте рисунок.

Ответ: ____________________

3. Определите, какая получится фигура, если правильный шестиугольник повернуть на 60° вокруг центра.

Ответ: ____________________

4. При симметрии относительно прямой a отрезок LM переходит в отрезок KN. Прямые a и LM не параллельны. Определите вид четырехугольника $LMNK$. Сделайте рисунок.

Ответ: ____________________

5. Квадрат $ABCD$ повернули около его вершины A так, что вершина B перешла в вершину D, а вершина C — в некоторую точку C_1. Найдите отрезок CC_1, если $AB = 4$ см. Сделайте рисунок.

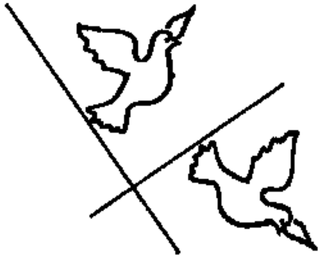
Ответ: ____________________

6. Правильный многоугольник имеет две оси симметрии, пересекающиеся под углом 15°. Какое наименьшее число сторон может иметь этот многоугольник?

Ответ: ____________________

2 вариант

1. Определите по рисунку вид движения. Укажите на рисунке, как оно может быть задано.



1. центральная симметрия (указать центр);
2. поворот (указать угол и направление);
3. осевая симметрия (указать ось);
4. параллельный перенос (указать вектор).

2. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC. Определите, какая получится фигура при симметрии данного треугольника относительно прямой, содержащей его гипотенузу. Сделайте рисунок.

Ответ: ______________________

3. Определите, какая получится фигура, если правильный четырехугольник повернуть на 90° вокруг центра.

Ответ: ______________________

4. При симметрии относительно точки O отрезок DC переходит в отрезок FG. Точка O не принадлежит отрезку DC. Определите вид четырехугольника $DCFG$. Сделайте рисунок.

Ответ: ______________________

5. Ромб $ABCD$ повернули около его вершины A так, что вершина B перешла в вершину D, а вершина C — в некоторую точку C_1. Найдите угол CAC_1, если $\angle BAD = 140°$. Сделайте рисунок.

Ответ: ______________________

6. Правильный многоугольник имеет две оси симметрии, пересекающиеся под углом 20°. Какое наименьшее число сторон может иметь этот многоугольник?

Ответ: ______________________

ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ПЛАНИМЕТРИИ (24 ч.)

Заключительное обобщающее повторение курса планиметрии преследует цель систематизировать и обобщить ранее полученные учащимися знания о свойствах плоских фигур, умения и навыки применять полученные знания при решении задач.

Анализ примерных программ основного общего образования ФГОС позволяет сформулировать и определить:

цели и задачи обучения планиметрии как систематическое изучение свойств основных геометрических фигур на плоскости, развитие логического мышления, пространственных представлений и геометрической интуиции; а также создание у учащихся такого запаса геометрических знаний и умений, который позволит им успешно изучать смежные дисциплины и курс стереометрии;

уровень и объем умений и навыков, обязательных для овладения ими учащихся в процессе изучения курса планиметрии, характеризуется рациональным сочетанием логической строгости и геометрической наглядности, направленностью на применение геометрического аппарата на вычисления величин углов, длин отрезков, площадей плоских фигур; на доказательства новых свойств геометрических фигур и их построения;

основную содержательную линию курса планиметрии как учение о свойствах геометрических фигур (точки, прямые, углы, треугольники, четырехугольники, многоугольники, окружность и круг).

Из сказанного выше следует, что систематизацию знаний и умений учащихся по курсу планиметрии целесообразно построить на основе систематизации свойств основных геометрических фигур, а именно, треугольников, четырехугольников, многоугольников, окружности и круга. Таким образом, весь учебный материал курса организуется по принципу наиболее полного описания свойств и признаков каждой из перечисленных геометрических фигур.

На первом этапе повторяется учебный материал, отражающий свойства одной из основных фигур планиметрии — треугольника. Повторение теорем о свойствах и признаках различных треугольников позволяет систематизировать умения учащихся проводить доказательные рассуждения, т.е. умения исследовать, что требуется для доказательства того или иного утверждения.

На втором этапе повторения учебный материал группируется вокруг многоугольников, включая и четырехугольники, при этом содержание геометрических задач обогащается разнообразием геометрических ситуаций. Особенностью второго этапа повторения является то, что умения учащихся проводить поиск логических обоснований или логических закономерностей свойств геометрических фигур получают дальнейшее развитие, но уже на новых и более сложных геометрических конфигурациях. Поэтому умение выделять более сложные (по сравнению с первым этапом) геометрические конфигурации выступает на первое место. Другой особенностью второго этапа повторения является возможность и неизбежность повторения во второй раз свойств треугольников.

К третьему этапу повторения относится повторение свойств окружности (круга) и ее элементов, т.е. нелинейной планиметрии. Такое повторение должно сочетать в себе как поиск свернутых доказательных рассуждений, так и сведение более сложных геометрических построений к более простым. Этот третий этап подводит итог в изучении всего богатства методов и приемов решения геометрических задач, демонстрирует эффективность совместного их использования.

Таким образом, курс повторяется в три этапа, и на каждом этапе происходит сочетание повторения учебного материала с некоторыми моментами повторения и закрепления навыков поиска доказательных рассуждений и решения содержательных задач. Характерной чертой предложенного приема организации повторения является то обстоятельство, что учащимся предлагается многократно возвращаться к ранее пройденному материалу.

Обобщение и систематизация знаний учащихся будут более успешными, если использовать в процессе повторения плакаты, рекомендованные в данных методических рекомендациях.

Содержание повторения

Первый этап

1. Определение треугольника и его элементов: угла, стороны, высоты, медианы и биссектрисы треугольника.

2. Понятие о равных треугольниках.

3. Признаки равенства треугольников. Признаки равенства прямоугольных треугольников.

4. Свойство углов при основании равнобедренного треугольника. Признак равнобедренного треугольника. Свойство медианы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию.

5. Сумма углов треугольников. Внешний угол треугольника и его свойства.

6. Средняя линия треугольника. Теорема Фалеса.

7. Теорема Пифагора. Следствия из теоремы Пифагора. Решение прямоугольных треугольников.

8. Признаки подобия треугольников.

9. Решение и построение треугольников. Теорема синусов. Теорема косинусов. Неравенство треугольника. Векторы.

10. Площадь треугольника.

Часть материала этого этапа относится к началу изучения курса планиметрии. Отсюда вытекает необходимость напомнить учащимся некоторые логические рассуждения. Например, схему доказательства от противного, структуру прямого и обратного утверждения, что такое свойство фигуры и что такое признак. С другой стороны, треугольник является наиболее употребительной фигурой в планиметрии, и основные факты: определения, формулировки теорем, формулы для вычисления элементов треугольника, хорошо известны учащимся. Исходя из этого, можно за основную форму организации повторения на первом этапе принять *обзорные лекции*, в которых кратко осветить весь теоретический материал, обращая внимание учащихся как на логику доказательств, так и на поиск доказательств. Лекции иллюстрируются и дополняются решением задач, которые либо вплетаются в канву лекций и демонстрируются учителем, либо решаются учащимися самостоятельно на специально выделенных уроках. Деятельность ученика при этом заключается в составлении конспекта лекций.

Второй этап

1. Определение параллелограмма. Признаки и свойства параллелограмма. Определение прямоугольника. Свойство диагоналей прямоугольника. Определение ромба. Свойство диагоналей ромба. Квадрат. Трапеция, средняя линия трапеции.

2. Многоугольники. Выпуклые многоугольники. Сумма углов выпуклого многоугольника. Внешний угол многоугольника. Правильные многоугольники.

3. Площадь прямоугольника, параллелограмма, трапеции, многоугольников.

Так как материал второго этапа повторения в основном использует свойства треугольника, повторение которых прошло на первом этапе, и элементы доказательств теорем первого этапа, то рекомендуется проведение уроков в виде *бесед*, в ходе которых учащиеся под руководством учителя доказывают основные теоремы и решают задачи.

Третий этап

1. Определение окружности и ее элементов: центра, радиуса, хорды, касательной к окружности.

2. Теорема о центре окружности, вписанной в треугольник. Теорема о центре окружности, описанной около треугольника.

3. Углы, вписанные в окружность. Центральный угол и его мера.

4. Окружность, вписанная в правильный многоугольник и описанная около правильного многоугольника. Формулы, выражающие соотношения между стороной правильного многоугольника и радиусом вписанной (описанной) окружности.

5. Длина окружности. Длина дуги окружности.

6. Круг. Площадь круга. Площадь кругового сектора. Площадь кругового сегмента.

Поскольку все основные методы планиметрии к началу третьего этапа повторения учащимися проанализированы в различных аспектах применения, то рекомендуется повторение содержания этого этапа провести в процессе *самостоятельной работы* учащихся: составить конспекты теоретического материала по плану, предложенному учителем, и решить рекомендованные задачи по карточкам. Фактически третий этап повторения является контрольным. Здесь проверяются и дорабатываются умения и навыки учащихся проводить доказательные рассуждения и применять весь багаж знаний по планиметрии в ходе решения содержательных задач. На этом этапе учитель выступает в роли консультанта и проводит индивидуальную работу с учащимися.

Первый этап.
Повторение темы «Треугольники» (10 ч.)

Комментарий для учителя

Учитывая уровень подготовки класса, при проведении первого этапа повторения возможны некоторые варианты. Например, можно всю тему «Решение треугольников» перенести на упражнения или на самостоятельную работу учащихся по учебнику или по схеме, которая была предложена им при изучении темы (рис. 25 а) и б)). Учитель может после любой из лекций отвести час или два на решение задач, если сочтет это необходимым, сократив тем самым число часов на решение задач в конце заключительного повторения. Может быть, учитель сочтет целесообразным прочитать все лекции подряд, а затем проводить уроки решения задач.

В процессе чтения лекций по первому этапу повторения доказываются только основополагающие и наиболее сложные в логическом построении теоремы. Во всех остальных случаях, как правило, внимание фиксируется на наиболее важных моментах доказательств.

Как при проведении доказательных рассуждений, так и в процессе поиска решения задач следует обращать внимание учащихся на выполнение чертежей. При этом при решении задач полезно из чертежа, иллюстрирующего условие задачи, вычленять геометрические конфигурации, позволяющие создать наглядную основу для эвристического перехода от содержания задачи к ранее установленным геометрическим фактам.

Из числа задач, рекомендованных к данным лекциям, в зависимости от формы организации этого этапа повторения необходимо выделить те задачи, которые будут решены в классе, и задачи для домашнего задания.

Примерное планирование первого этапа заключительного повторения:

Лекции по теме «Треугольники» — 3 часа.

Решение задач по теме лекций — 3 часа.

Решение и построение треугольников (лекция или беседа) — 2 часа.

Решение задач по теме «Треугольники» — 2 часа.

Методические рекомендации

ЛЕКЦИЯ 1

1°. Вводится определение равных фигур. Определяется равенство отрезков, углов и треугольников. Повторяются *свойства измерения отрезков*, *свойства измерения углов* и *свойства измерения площадей*. Для этого полезно воспользоваться плакатом 1 (рис. 59), который позволяет обратить внимание учащихся на видимые из рисунков аналогии *свойств измерения*, что будет способствовать более глубокому усвоению материала.

Плакат 1. Измерение геометрических величин

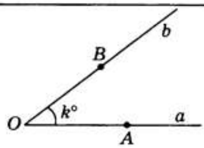
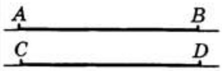
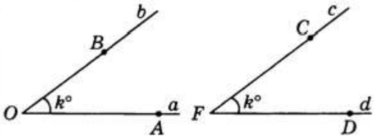
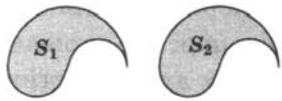
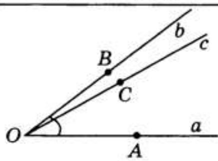
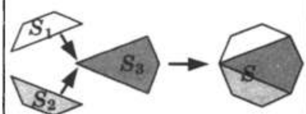
Свойства измерения отрезков	Свойства измерения углов	Свойства измерения площадей
 Длина отрезка выражается положительным числом. $AB = a > 0$	 Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. $\angle AOB = k^\circ > 0$; $\angle ab = k^\circ > 0$	 Площадь фигуры выражается положительным числом. $S > 0$
 Равные отрезки имеют равные длины. $AB = CD = a$.	 Равные углы имеют равные градусные меры. $\angle AOB = \angle CFD = k^\circ$, $\angle ab = \angle cd$	 Равные фигуры имеют равные площади. $S_1 = S_2$
 Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой. $AB = AC + CB$.	 Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами. $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ $\angle ab = \angle ac + \angle cb$	 Если фигура разделена на части, то ее площадь равна сумме площадей составляющих ее частей. $S_1 + S_2 + S_3 = S$

Рис. 59

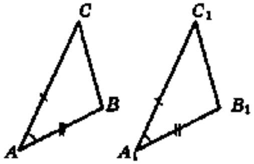
2°. Проводится доказательство трех признаков равенства треугольников.

Использование *признаков равенства треугольников* является одним из главнейших методов доказательства теорем и решения задач во всем курсе геометрии. При этом теоремы о признаках равенства треугольников в любом курсе планиметрии являются достаточно сложными. Поэтому серия рисунков, сопровождающих доказательство каждого из признаков, поможет учителю сэкономить урочное время, а учащимся послужит опорой для усвоения теоремы (Плакат 2 (рис. 60)).

Плакат 2. Признаки равенства треугольников

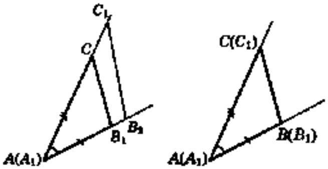
Первый признак равенства треугольников

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



Дано: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$
$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$
$AB = A_1B_1$,
$AC = A_1C_1$

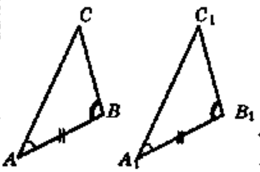
Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$



а) *б)*

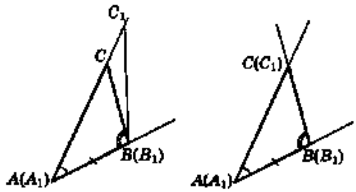
Второй признак равенства треугольников

Если сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



Дано: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$
$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$,
$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$
$AB = A_1B_1$

Доказать:
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

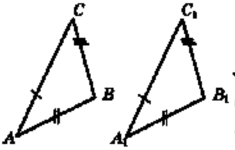


а) *б)*

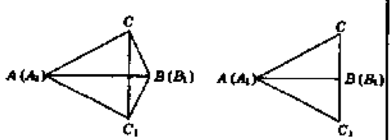
Третий признак равенства треугольников

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

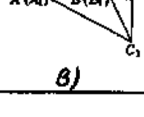
Дано: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$
$BC = B_1C_1$,
$AB = A_1B_1$,
$AC = A_1C_1$.



Доказать:
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$



а) *б)*



в)

Рис. 60

3°. Вводятся определения равнобедренного и равностороннего треугольников и формулируются две теоремы: свойство и признак равнобедренного треугольника, которые являются примерами прямой и обратной теорем.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Доказательство прямой теоремы опирается на первый признак равенства треугольников, а обратной — на соотношение между сторонами и углами треугольника. В качестве примеров прямой и обратной теорем можно предложить учащимся следующее задание:

1. Докажите, что у равностороннего треугольника все углы равны.

2. Сформулируйте и докажите теорему, обратную утверждению предыдущей задачи.

4°. Напомнив учащимся определения высоты, медианы и биссектрисы треугольника, следует сформулировать свойства медианы (биссектрисы, высоты) равнобедренного треугольника, проведенной к основанию. При этом полезно решить задачи:

3. Докажите, что если в треугольнике высота делит основание пополам, то треугольник равнобедренный.

4. Докажите, что если в треугольнике медиана перпендикулярна стороне, к которой она проведена, то треугольник равнобедренный.

5. Докажите, что в равностороннем треугольнике все медианы, высоты и биссектрисы равны.

5°. Для закрепления материала первой лекции полезно рассмотреть признаки равенства специфических треугольников (равнобедренных, прямоугольных, равносторонних), т.е. выяснить вопрос — как изменяются признаки равенства треугольников, если треугольник по определению обладает определенными свойствами. В зависимости от уровня подготовки класса эти признаки можно попытаться сформулировать с помощью учащихся или дать в виде задач. Признаки равенства прямоугольных треугольников учащиеся знают из курса планиметрии, а для равнобедренных и равносторонних треугольников их полезно сформулировать:

6. Докажите равенство равнобедренных треугольников по:

а) боковой стороне и углу при вершине;

б) основанию и углу при основании;

в) основанию и боковой стороне.

7. Докажите равенство равносторонних треугольников по стороне.

6°. Следствием из равенства треугольников является утверждение, что у равных треугольников все соответствующие элементы равны, а именно: соответствующие медианы, биссектрисы, высоты, средние линии, радиусы вписанных и описанных окружностей. Для этого можно предложить задачи типа:

8. Докажите, что у равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$:

а) медианы, проведенные к соответственно равным сторонам, равны;

б) биссектрисы, проведенные из вершин A и A_1, равны;

в) высоты, проведенные к соответственно равным сторонам, равны.

9. Докажите, что у равных треугольников соответствующие средние линии равны.

10. Докажите, что у равных треугольников радиусы вписанных и описанных окружностей равны.

В ходе решения всех этих задач выделяется пара равных треугольников на основе свойств медианы, высоты, средней линии, радиуса, проведенного в точку касания.

7°. Для индивидуальной работы по карточкам можно предложить более сложные задачи:

11. На прямой, пересекающей стороны угла, найти точку, равноудаленную от сторон этого угла.

12. Через точку, данную внутри или вне угла, провести такую прямую, которая отсекала бы на сторонах угла равные отрезки.

13. Постройте прямую, перпендикулярную отрезку AB в точке B, при условии, что отрезок нельзя продлить за точку B.

ЛЕКЦИЯ 2

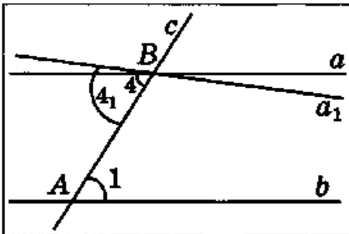
1°. Вводятся определения параллельных прямых и углов, образованных двумя прямыми, пересеченными третьей. Затем формулируется аксиома о параллельных прямых, при этом внимание учащихся обращается на существование “*не более одной прямой, параллельной данной*”. Формулируются признаки параллельности прямых и свойства углов при параллельных прямых и секущей.

При доказательстве теоремы «*Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны*» используется метод «*доказательство от противного*». Поскольку этот метод широко применяется как при доказательстве теорем, так и при решении задач, то целесообразно напомнить учащимся его алгоритм на примере доказательства этого утверждения:

1) делаем предположение, противоположное тому, что хотим доказать, получаем новое условие;

2) проводим рассуждения, опираясь на аксиомы и теоремы;

3) приходим к противоречию либо с первоначальным условием задачи (теоремы), либо с аксиомами, либо с ранее доказанными теоремами.



Дано: a и b — прямые;
c — секущая;
$a \parallel b$

Доказать: $\angle 1 = \angle 4$

Рис. 61

Доказательство.

1) Предположим, что накрест лежащие углы $\angle 1$ и $\angle 4$ не равны.

Что это значит? Это значит, что условие теоремы теперь следует записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Дано}: a \text{ и } b \text{ — прямые;} \\ &\quad c \text{ — секущая;} \\ &\quad a \parallel b \end{aligned}\right\} \text{условие теоремы;}$$

$\angle 1 \neq \angle 4$ — дополнительное условие.

2) Отложим от луча BA угол 4_1, равный $\angle 1$, так, чтобы углы $\angle 1$ и $\angle 4_1$ были накрест лежащими при прямых a_1 и b и секущей c (рис. 61).

3) Так как по построению $\angle 1 = \angle 4_1$, то $a_1 \parallel b$ (признак *параллельности прямых*).

4) По условию $a \parallel b$.

5) Через точку B проходят прямая $a \parallel b$ и прямая $a_1 \parallel b$.

6) Пришли к противоречию с аксиомой *параллельных прямых*, значит, прямая a совпадает с прямой a_1, значит предположение о том, что углы $\angle 1$ и $\angle 4$ не равны, неверно.

7) Отсюда, $\angle 1 = \angle 4$ (*накрест лежащие углы*, образованные секущей и параллельными прямыми a и b, равны).

Для закрепления материала, связанного с признаками и свойствами параллельных прямых, рекомендуются задачи:

> **14.** Докажите, что два перпендикуляра к одной прямой параллельны.
> **15.** При каком положении секущей все углы, образованные ею с двумя параллельными прямыми, равны?
> **16.** Две параллельные прямые пересечены третьей прямой. При этом один из внутренних углов равен 140°. Под каким углом его биссектриса пересекает другую параллельную прямую?

2°. Учащимся известны пары равных углов (*вертикальные, накрест лежащие при параллельных прямых и секущей, вписанные углы, опирающиеся на одну дугу*) и пары углов, в сумме составляющие 180° (*смежные и односторонние при параллельных прямых и секущей*). Найдем еще пары углов, равных или в сумме составляющих 180°.

> **17.** Докажите, что если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы равны или сумма их равна 180°.
> **18.** Докажите, что если стороны одного угла соответственно перпендикулярны сторонам другого угла, то такие углы равны или их сумма равна 180°.

3°. Доказательство теоремы *о сумме углов треугольника* проводится с опорой на свойство углов при параллельных прямых и секущей.

19. Докажите, что биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника при одной вершине треугольника перпендикулярны.

20. Докажите, что прямая, проведенная через вершину равнобедренного треугольника параллельно основанию, является биссектрисой внешнего угла при этой вершине.

21. Один угол равнобедренного треугольника равен разности остальных. Найдите углы треугольника.

22. Докажите, что угол между прямыми, содержащими биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника, есть величина постоянная.

23. Докажите, что если два внешних угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

4°. При решении следующих задач на построение может быть использована *теорема о сумме углов треугольника*:

24. Постройте с помощью циркуля и линейки угол, равный: а) 60°, б) 30°, в) 45°, г) 75°, д) 105°, е) 135°.

25. Разделите с помощью циркуля и линейки на три равные части угол, равный: а) 45°, б) 90°, в) 135°.

5°. Используя известный факт, что *если острый угол прямоугольного треугольника равен 30°, то противоположный ему катет равен 1/2 гипотенузы*, можно решить с учащимися следующие задачи, которые позволят установить новые свойства прямоугольных треугольников

26. Определите отношение между сторонами треугольника, если его углы относятся как 1 : 2 : 3.

27. Найдите углы прямоугольного треугольника, если угол между биссектрисой и высотой, проведенными из вершины прямого угла, равен 15°.

28. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 30°. Докажите, что один из отрезков, на которые делит гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла, в три раза больше другого.

ЛЕКЦИЯ 3

1°. Вводится определение *подобных треугольников* и формулируются *признаки подобия треугольников.* Для актуализации знаний учащихся по теме: "*Подобные треугольники*" рекомендуются задачи:

> **29.** Докажите, что прямая, параллельная какой-нибудь стороне треугольника, отсекает от него подобный треугольник.
>
> **30.** Докажите, что в подобных треугольниках соответственные (сходственные) стороны пропорциональны соответственным (сходственным): а) высотам, б) биссектрисам, в) медианам, г) средним линиям, д) радиусам вписанных окружностей.
>
> **31.** Докажите, что в прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, делит его на два треугольника, подобные исходному и друг другу.
>
> **32.** Сформулируйте и докажите признаки подобия для: а) прямоугольных, б) равнобедренных, в) равносторонних треугольников.
>
> **33.** Докажите, что отрезок, соединяющий основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает треугольник, подобный данному.

Если при решении задач к лекции 2 было разобрано с учащимися решение задач 17 и 18 к пункту 2, то следующая задача не вызовет затруднений при ее решении.

> **34.** Докажите, что если стороны одного треугольника соответственно параллельны или соответственно перпендикулярны сторопам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

2°. Дается определение *средней линии треугольника* и формулируется *теорема о средней линии треугольника.* Для доказательства теоремы о средней линии треугольника применяется *векторный метод.*

ЛЕКЦИЯ 4 или БЕСЕДА

Этот урок посвящен *решению треугольников*, и его лучше проводить в форме беседы и решения задач под руководством учителя.

1°. В процессе повторения этой темы необходимо через решения задач повторить тригонометрический материал.

35. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна a, а один из острых углов α. Найдите второй острый угол и катеты.

36. В прямоугольном треугольнике катет равен a, а противолежащий ему угол α. Найдите второй острый угол, противолежащий ему катет и гипотенузу.

37. В прямоугольном треугольнике дана гипотенуза a и острый угол α. Найдите катеты, их проекции на гипотенузу и высоту, проведенную из вершины прямого угла.

В ходе решения задач 35–37 записываются *основные формулы для решения прямоугольного треугольника* (таблица 1) с использованием *определений синуса, косинуса и тангенса острого угла для прямоугольного треугольника и теорему Пифагора*.

Также здесь необходимо повторить векторы через решения задач. Как правило, эти задачи просты. При их решении следует напомнить учащимся, что иногда полезно ввести систему координат и использовать координатно-векторный метод решения треугольников. Однако при этом не стоит забывать, что этот материал изучается в ознакомительном порядке.

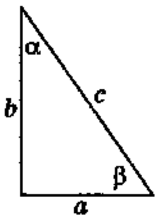
38. Докажите, что векторы $\overline{a}\{m;\ n\}$ и $\overline{b}\{-n;\ m\}$ перпендикулярны или равны нулю.

39. Даны векторы $\overline{a}\{3;\ 4\}$ и $\overline{b}\{m;\ 2\}$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

40. Даны вершины треугольника $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 1)$, $C(4;\ 5)$. Найдите косинусы углов треугольника.

41. Найдите угол между векторами $\overline{a}\{1;\ 2\}$ и $\overline{b}\left\{1;\ \frac{1}{2}\right\}$.

Плакат 3. Решение прямоугольных треугольников



$c^2 = a^2 + b^2 \quad a^2 = c^2 - b^2$

$c = \dfrac{a}{\cos\beta}$; $a = c \cdot \sin\alpha$;

$c = \dfrac{b}{\sin\beta}$; $a = c \cdot \cos\beta$;

$c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$; $a = b \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$;

$c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$. $a = \dfrac{b}{\mathrm{tg}\,\beta}$.

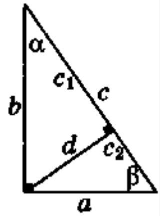
$b^2 = c^2 - a^2$

$b = c \cdot \sin\beta$;

$b = c \cdot \cos\alpha$;

$b = a \cdot \mathrm{tg}\,\beta$;

$b = b = \dfrac{a}{\mathrm{tg}\,\alpha}$



$a^2 = c \cdot c_2$;

$b^2 = c \cdot c_1$;

$d^2 = c_2 \cdot c_1$.

Рис. 62

2°. Для того чтобы получить все формулы, необходимые *для решения прямоугольного треугольника* (плакат 3 (рис. 62)), используя подобия прямоугольных треугольников, можно вывести равенства в последнем столбце.

При повторении *теоремы Пифагора* необходимо обратить внимание учащихся на то, что в формулировке теоремы есть ровно одно условие (*ABC* — прямоугольный треугольник) и этого условия достаточно, чтобы выразить гипотенузу через катеты.

После повторения *теоремы Пифагора* и ее следствий можно доказать теорему, обратную *теореме Пифагора.*

> **42.** Дан треугольник со сторонами a, b и c. Докажите, что если $a^2 + b^2 = c^2$, то данный треугольник — прямоугольный с прямым углом, противолежащим стороне c.

3°. Сформулируем *теорему косинусов*, запишем формулу $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, выясним с учащимися, какой знак должен быть перед удвоенным произведением сторон на косинус угла между ними. Для доказательства *теоремы косинусов* по учебнику А.В. Погорелова применяется *векторный метод.* А по учебнику Л.С. Атанасяна и др. для ее доказательства применяется *координатный метод.* После повторения теоремы косинусов целесообразно решить следующую задачу:

> **43.** Дан треугольник со сторонами a, b, и c. Докажите, что если $a^2 + b^2 \le c^2$, то угол, противолежащий стороне c, — острый. Если $a^2 + b^2 \ge c^2$, то угол, противолежащий стороне c, — тупой.

Сформулируем теорему синусов. Ее доказательство основывается на теореме о площади треугольника $S = \dfrac{1}{2}ab \cdot \sin\alpha$.

Формулируется неравенство треугольника.

4°. Решение треугольников проводится одновременно с построением, при этом полезно воспользоваться, как и при первичном прохождении темы, таблицами, данными на рисунках 25 а) и б).

Задача I: *Найдите все элементы треугольника по двум сторонам и углу между ними.*

Или: *Постройте треугольник по двум сторонам и углу между ними.*

Приступая к решению задачи, следует заметить, что любые два треугольника с заданными равными двумя сторонами и углом между ними будут равны по первому признаку равенства треугольников. А это означает, что при решении треугольника по двум данным сторонам и углу между ними значения для третьей стороны и остальных двух углов имеют единственные значения, т.е. решение единственное.

Задача II: *Найдите все элементы треугольника по стороне и двум углам.*

Или: *Постройте треугольник по стороне и двум углам.*

Возможны два случая:

1. Углы являются прилежащими к стороне a.
2. Один из углов является противолежащим стороне a.

В первом случае проводим построение и утверждаем, что в силу второго признака равенства треугольников решение единственно.

Во втором случае применяем теорему о сумме углов треугольника и строим третий угол. Задача сводится к первому случаю (таблица на рис. 25 а).

Задача III: *Найдите все элементы треугольника по трем сторонам.*

Или: *Постройте треугольник по трем сторонам.*

Следует заметить, что, как и задачи I и II, задача нахождения углов треугольника по трем данным сторонам имеет единственное решение в силу третьего признака равенства треугольников.

Рассмотрим более сложный пример решения треугольников (таблица на рис. 25 б).

Задача IV: *Найдите все элементы треугольника по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них.*

Или: *Постройте треугольник по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них.*

Использование плаката (таблица на рис. 25 б) в этом случае наиболее целесообразно, поскольку из построений, иллюстрирующих соотношения данных сторон и угла, хорошо видно, в каком случае задача имеет два решения, одно решение, а в каком случае решения нет.

5°. Заканчивая повторение материала, связанного с конфигурацией треугольника, полезно обсудить с учащимися вопрос о трех замечательных точках треугольника:

44. Докажите, что в треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке.

45. Докажите, что в треугольнике медианы пересекаются в одной точке.

46. Докажите, что в треугольнике высоты пересекаются в одной точке.

6°. При рассмотрении темы «*Площадь треугольников*» полезно записать все известные учащимся формулы для вычисления площади треугольника (плакат 4 (рис. 63)).

Плакат 4. Формулы площадей

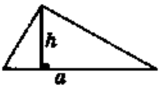
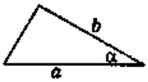
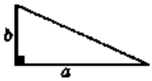
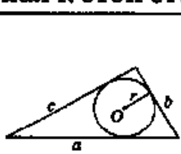
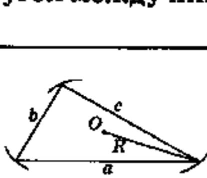
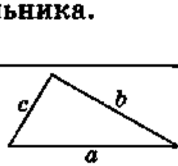
 $S = \frac{1}{2}ah$	 $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$	 $S = \frac{1}{2}ab$
где a — сторона треугольника, а h — высота, проведенная к этой стороне.	где a и b — стороны треугольника, а α — угол между ними.	где a и c — катеты прямоугольного треугольника.
 $S = rp$;	 $S = \frac{abc}{4R}$;	 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
p — его полупериметр, r — радиус вписанной окружности.	где a, b и c — стороны треугольника, R — радиус описанной окружности.	где a, b и c — стороны треугольника, p — его полупериметр.

Рис. 63

При этом полезно решить задачи по готовому чертежу.

47. Найдите площадь заштрихованной фигуры, используя данные рисунков (рис. 64–66).

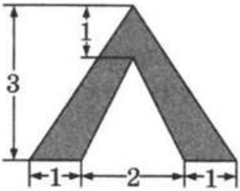


Рис. 64

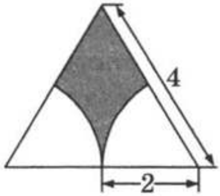


Рис. 65

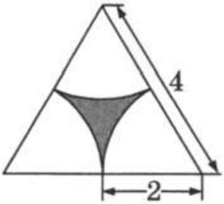


Рис. 66

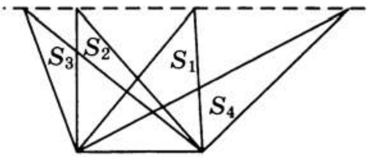


Рис. 67

Кроме того, полезно обратить внимание учащихся на понятие «*равновеликости треугольников*» через решение задач типа:

48. Определите, площадь какого треугольника из четырех данных на рисунке 67 наибольшая. Попробуйте упорядочить площади треугольников S_1, S_2, S_3 и S_4 по убыванию.

49. Разделите треугольник прямыми, проходящими через одну из его вершин на три части, площади которых относятся как 1 : 2 : 3.

50. Разрежьте равнобедренный треугольник на такие две части, чтобы затем сложить из них: а) прямоугольник; б) параллелограмм.

Второй этап. Повторение темы «Многоугольники» (4 ч.)

Комментарий для учителя

Как было сказано выше, второй этап повторения связан с многоугольниками и организуется в форме беседы. Повторение теоретической части рассчитано на два урока. На первом уроке проводится беседа о свойствах четырехугольников: параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции. На втором уроке рассматривается материал, связанный со свойствами многоугольников. Теоретические вопросы при этом чередуются с решением задач, посвященных, как правило, доказательству дополнительных свойств рассматриваемых фигур. Доказательные рассуждения при этом строятся, как правило, на основе идей и методов учебного материала первого этапа повторения. Это позволяет активно использовать основные теоремы, связанные с треугольником, и показать их роль в решении задач, связанных с более сложными конфигурациями.

Почти каждая задача из числа рекомендованных ко второму этапу повторения, как правило, дается в паре с аналогичной задачей. Поэтому достаточно просто выделить задачи, которые, по мнению учителя, необходимо решить в классе, и задачи для домашнего задания.

Примерное планирование второго этапа заключительного повторения:

Беседы по теме «Многоугольники» — 2 часа.

Решение задач по теме бесед — 2 часа.

Решение задач по теме «Многоугольники» — 4 часа.

Методические рекомендации

БЕСЕДА 1

1°. При *обобщении* и *систематизации знаний* учащихся о *параллелограмме и его частных видах* полезно использовать предлагаемый ниже плакат 5 (рис. 69).

Рекомендуется предложить учащимся нарисованную на доске традиционную схему (рис. 68), из которой видно, что прямоугольник и ромб обладают всеми свойствами параллелограмма и, кроме того, имеют свои, только им присущие свойства, а квадрат является универсальным четырехугольником, обладающим всеми свойствами как параллелограмма, так и прямоугольника и ромба. После этого по плакату 4, двигаясь от четырехугольника к четырехугольнику, можно наполнять схему конкретными сведениями о свойствах четырехугольников, используя зрительный ряд и краткие записи, данные на плакате.

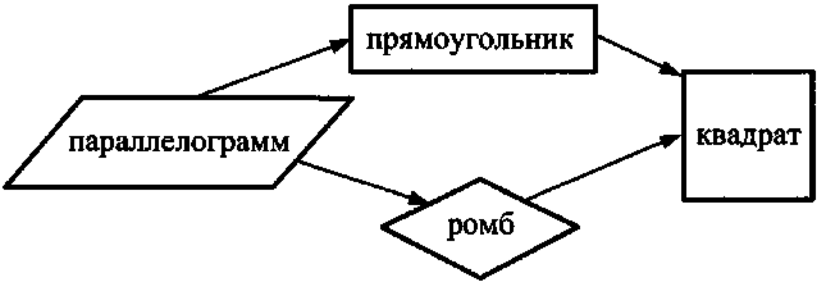


Рис. 68

Для проведения систематизации знаний учащихся по теме «Четырехугольники» по плакату можно предложить следующую схему:

1) повторить определение и свойства *параллелограмма*;

2) повторить определения и свойства *прямоугольника* и *ромба*, включая свойства *параллелограмма*; подчеркнуть, что параллелограмм, у которого *все углы равны*, является *прямоугольником*, а параллелограмм, у которого все *стороны равны*, является *ромбом*;

3) повторить характеристические свойства частных видов параллелограмма:

а) перпендикулярность сторон и равенство диагоналей прямоугольника и квадрата;

б) перпендикулярность диагоналей и равенство сторон квадрата и ромба;

в) свойство диагоналей квадрата и ромба быть биссектрисами соответствующих углов;

4) подчеркнуть универсальность квадрата как частного вида параллелограмма.

Затем следует повторить признаки параллелограмма и его частных видов. Для этого можно использовать плакат 6.

Плакат 5. Определения и свойства параллелограмма и его частных видов

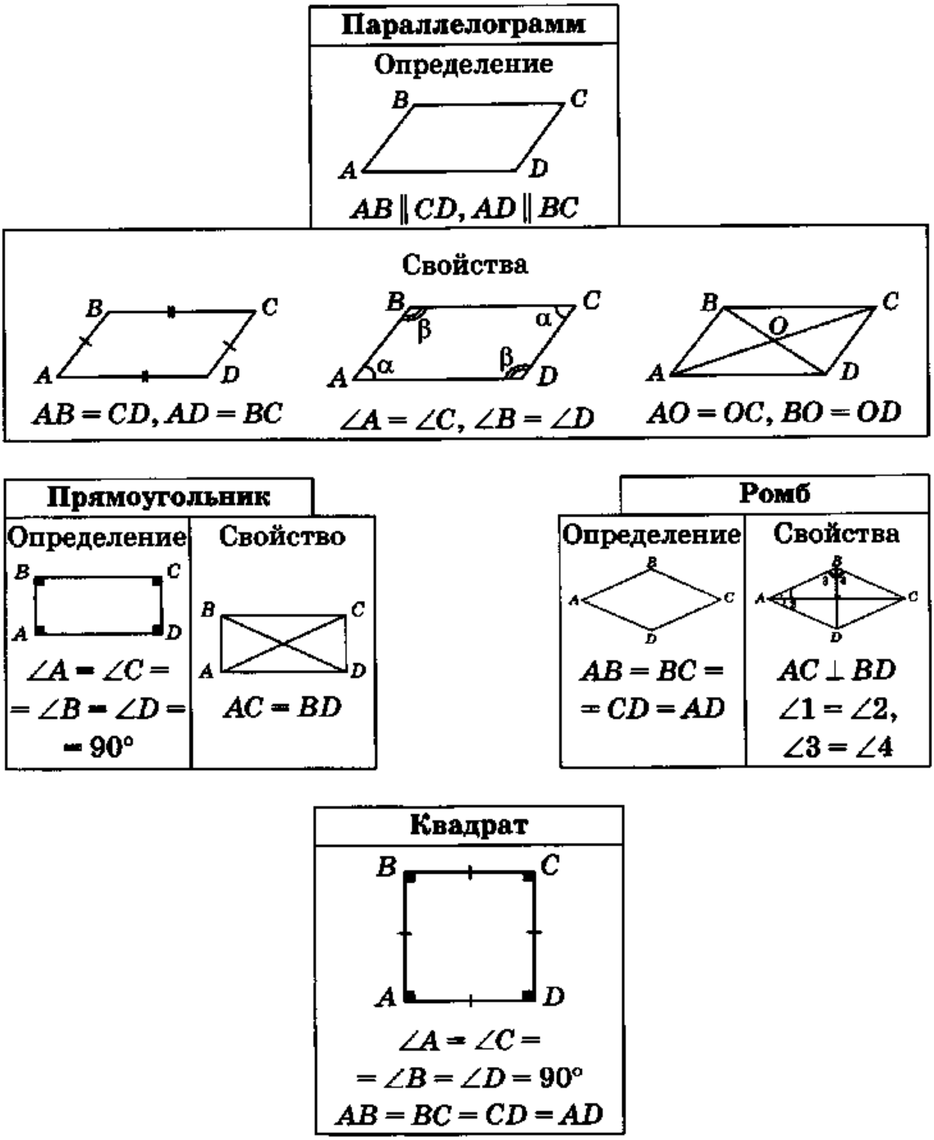


Рис. 69

Затем следует повторить признаки параллелограмма и его частных видов. Для этого можно использовать плакат 6.

Плакат 6. Признаки параллелограмма и его частных видов

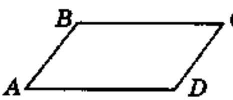
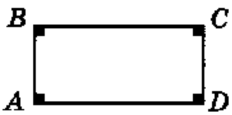
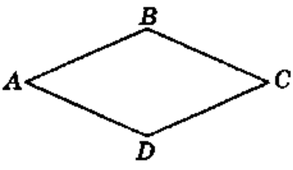
Если у четырехугольника: 1) $AB \parallel CD$, $AB = CD$; 2) $AO = OC$, $BO = OD$; 3) $AB = CD$, $AD = BC$.	*Если у параллелограмма:* 1) $\angle A = \angle B$; 2) $\angle A = 90°$; 3) $AC = BD$. *Если у четырехугольника:* $\angle A = \angle C =$ $= \angle B = \angle D = 90°$	*Если у параллелограмма:* 1) $AB = BC$; 2) $AC \perp BD$; 3) AC — биссектриса $\angle A$ и $\angle C$; *Если у четырехугольника:* $AB = BC = CD = AD$
то  *параллелограмм*	*то*  *прямоугольник*	*то*  *ромб*

Рис. 70

Из практики преподавания геометрии хорошо известно, что учащиеся, как правило, достаточно уверенно делают ссылки при решении задач на свойства фигур и испытывают определенные трудности при подведении фигуры под определение или признак.

Поэтому следует еще раз обратить внимание учащихся на то, в каких ситуациях применяются свойства фигур, а в каких признаки:

если в условии задачи *дан параллелограмм* (прямоугольник, ромб или квадрат), то можно использовать в решении любое *свойство параллелограмма* (прямоугольника, ромба или квадрата);

если в условии задачи *дана характеристика* некоторого *четырехугольника* и по этой характеристике необходимо определить вид четырехугольника, то применяются *признаки*.

Проиллюстрировать применение *признаков параллелограмма* и *прямоугольника* можно на следующей задаче:

В окружности с центром в точке O проведены диаметры AC и BD. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

На основании того, что диагонали (диаметры AC и BD) четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (центр окружности) и делятся пополам, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, а затем из равенства диагоналей (диаметры одной окружности): параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник.

2°. Повторяя признаки и определения различных четырехугольников, целесообразно в ходе решения задач найти новые признаки или применить известные в неожиданных ситуациях:

а) для параллелограмма:

51. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

б) для прямоугольника:

52. В параллелограмме из вершин тупых углов на противолежащие стороны опущены перпендикуляры. Доскажите, что полученный четырехугольник — прямоугольник.

53. Докажите, что если у параллелограмма все углы равны, то он — прямоугольник.

в) для ромба:

54. Докажите, что четырехугольник, у которого все стороны равны, является ромбом.

г) для квадрата:

55. Дан квадрат $ABCD$. На каждой его стороне отложены равные отрезки $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат.

Следующая задача предлагает как бы “обратный ход”. Известно, что полученный четырехугольник является прямоугольником (ромбом; квадратом). Необходимо установить вид исходного четырехугольника.

56. Середины сторон *произвольного* четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Определите вид такого четырехугольника, чтобы середины его сторон были вершинами: а) прямоугольника; б) ромба; в) квадрата.

Для систематизации и актуализации знаний учащихся о свойствах четырехугольников можно рекомендовать решить задачи:

а) для параллелограмма:

57. Докажите, что в параллелограмме: а) сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°; б) сумма всех углов равна 360°.

58. Докажите, что у параллелограмма точка пересечения диагоналей является центром симметрии.

59. В равнобедренный треугольник вписан параллелограмм так, что угол параллелограмма совпадает с углом при вершине треугольника, а вершина противоположного угла лежит на основании. Докажите, что периметр параллелограмма есть величина постоянная для данного треугольника.

б) <u>для ромба:</u>

60. В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Определите углы ромба.

61. Докажите, что диагонали ромба являются его осями симметрии.

62. В равносторонний треугольник вписан ромб так, что одна вершина у них общая, а три другие вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите, в каком отношении делят стороны треугольника вершины ромба.

в) <u>для квадрата:</u>

63. Докажите, что прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей квадрата параллельно его сторонам, являются осями симметрии квадрата.

г) <u>для трапеции</u>

64. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен полуразности оснований.

65. Докажите, что если в трапеции диагонали являются биссектрисами углов при одном из оснований, то три стороны трапеции равны.

66. Докажите, что в равнобедренной трапеции: а) углы, прилежащие к одному основанию, равны, б) диагонали равны, в) треугольники, на которые диагонали делят трапецию, прилежащие к боковым сторонам, равны; г) треугольники, на которые диагонали делят трапецию, прилежащие к основаниям, подобны. Нужно ли для доказательства утверждения г) условие, что трапеция — равнобедренная?

Задачи на построение дают возможность во всем объеме использовать как признаки, так и свойства фигур:

67. Вписать в данный треугольник квадрат так, чтобы одна его сторона лежала на основании треугольника, а вершины противолежащих углов — на боковых сторонах треугольника.

68. Построить *параллелограмм* по: а) двум сторонам и одной диагонали; б) основанию, высоте и диагонали; в) двум диагоналям и высоте.

69. Построить *ромб* по: а) стороне и диагонали; б) двум диагоналям; в) углу и диагонали, исходящей из этого угла.

70. Построить *квадрат* по: а) сумме диагонали и стороны, б) разности диагонали и стороны.

71. Построить *трапецию* по: а) основанию, прилежащему к нему углу и двум непараллельным сторонам; б) четырем сторонам; в) основанию, высоте и двум диагоналям.

БЕСЕДА 2

1°. Ввести понятия многоугольника и правильного многоугольника. Систематизацию материала, связанного с конфигурациями многоугольников, можно провести в ходе решения следующих задач.

72. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины: а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) восьмиугольника? Сравните число диагоналей с числом сторон многоугольника.

73. Докажите, что сумма внешних углов правильного выпуклого n-угольника равна 360°.

74. Докажите, что центральный угол правильного многоугольника равен его внешнему углу. (Центральный угол правильного многоугольника — угол, образованный радиусами описанной окружности, проведенными к двум соседним вершинам многоугольника.)

75. Докажите, что в шестиугольнике, противолежащие стороны которого равны и параллельны, три диагонали, соединяющие противолежащие вершины, пересекаются в одной точке.

76. Докажите, что нечетные вершины правильного $2n$-угольника являются вершинами правильного n-угольника.

77. Докажите, что середины сторон правильного n-угольника являются вершинами правильного n-угольника.

2°. Повторение формул, связывающих *радиус* (R) *описанной окружности* и *радиус* (r) *вписанной окружности* с длиной стороны (a_n) правильного n-угольника $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$, полезно провести, как и при первичном прохождении темы, с использованием плаката, данного на рисунке 36.

3°. При рассмотрении темы «*Площади четырехугольников*» полезно записать все известные учащимся формулы для вычисления площадей четырехугольников (плакат 7 (рис. 71).

Плакат 7. Формулы площадей четырехугольников

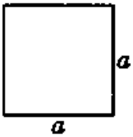
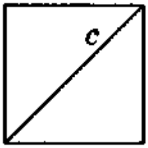
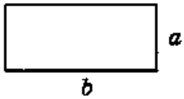
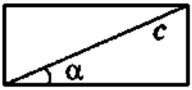
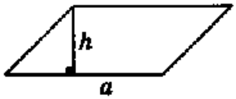
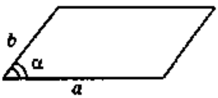
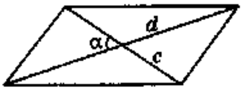
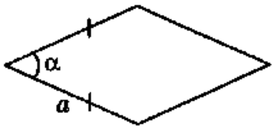
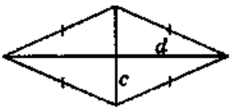
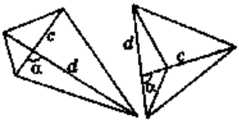
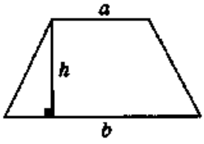
 $S = a^2$ где a — сторона квадрата.	 $S = \frac{1}{2}c^2$, где c — диагональ квадрата.	 $S = ab$, где a и b — стороны прямоугольника.
 $S = c^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$, где c — диагональ прямоугольника, а α — угол ее наклона к стороне.	 $S = \frac{1}{2}c^2 \sin\alpha$, где c — диагональ прямоугольника, а α — угол между диагоналями.	 $S = ah$, где a — сторона параллелограмма, а h — высота, проведенная к этой стороне.
 $S = ab \cdot \sin\alpha$, где a и b — стороны параллелограмма, а α — угол между ними.	 $S = = \frac{1}{2}cd \cdot \sin\alpha$, где c и d — диагонали параллелограмма, а α — угол между ними.	 $S = a^2 \sin\alpha$, где a — сторона ромба, а α — угол при вершине ромба.
 $S = \frac{cd}{2}$, где c и d — диагонали ромба.	 $S = \frac{1}{2}cd \cdot \sin\alpha$, где c и d — диагонали четырехугольника, а α — угол между диагоналями.	 $S = \frac{a+b}{2}h$, где a и b — основания трапеции, а h — ее высота.

Рис. 71

Часть этих формул можно предложить вывести в процессе решения задач.

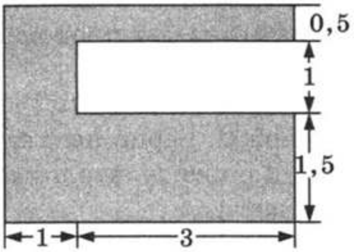


Рис. 72

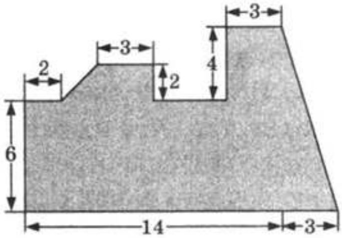


Рис. 73

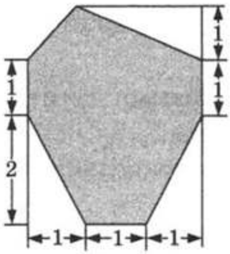


Рис. 74

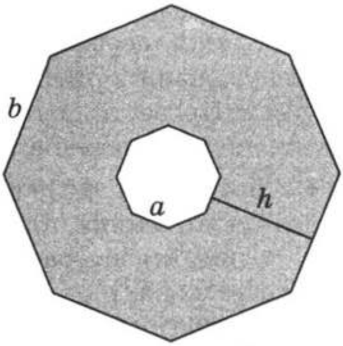


Рис. 75

На прямое применение формул для вычисления площадей полезно решить задачи типа:

78. Найдите площадь заштрихованной фигуры, используя данные рисунков (рис. 72–75).

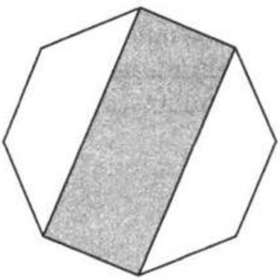


Рис. 76

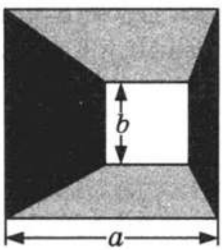


Рис. 77

Кроме того, умение применять формулы для вычисления площадей различных четырехугольников можно проверить при решении задач типа:

79. Квадрат и ромб, не являющийся квадратом, имеют одинаковые периметры. Сравните площади этих фигур.

80. В правильном восьмиугольнике проведены две параллельные диагонали (рис. 76). Докажите, что площадь заштрихованной части равна площади белой части.

81. Внутри большего квадрата расположен меньший квадратик так, что их стороны параллельны. Вершины квадратов соединены отрезками (рис. 77). Докажите, что площадь серой части равна площади черной части.

При повторении темы *«Площади многоугольников»* полезно обратить внимание учащихся на понятия *равновеликости* и *равносоставленности*, поскольку для того, чтобы найти площадь многоугольника, необходимо разбить его на такие треугольники и четырехугольники, площади которых выражаются известными формулами. Провести повторение этих свойств площади можно в ходе выполнения следующих упражнений:

82. Докажите, что диагональ параллелограмма делит его на два треугольника, площади которых равны.

1. Нарисуйте два равных прямоугольных треугольника. Составьте из них:

а) равнобедренный треугольник; б) прямоугольник; в) параллелограмм.

2. Нарисуйте прямоугольник, у которого одна сторона в два раза больше другой.

а) Покажите, на какие две части нужно его разрезать, чтобы затем сложить из них прямоугольный треугольник.

б) Покажите, на какие три части нужно его разрезать, чтобы затем сложить из них квадрат.

83. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника равны и параллельны. Его вершины соединены диагоналями через одну (рис. 78). Определите, площадь какой части больше: заштрихованной или белой?

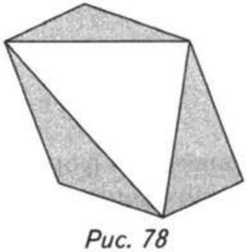


Рис. 78

Третий этап.
Повторение темы «Окружность» (2 ч.)

Комментарий для учителя

Повторение всего материала, связанного с окружностью, рекомендуется проводить в ходе решения задач. Часть работы ведется учащимися самостоятельно, например, работа по карточкам. Решение отдельных задач, которые отражают наиболее значимые геометрические факты, целесообразно продемонстрировать на доске. Предлагаемая примерная последовательность повторения предполагает, что перед каждым блоком задач повторялись основные определения и формулировки теоремы. Часть из доказанных в курсе теорем переформулирована в виде задач.

Примерное планирование третьего этапа заключительного повторения: составление конспектов по предложенному ниже плану под руководством учителя, включая решение задач по теме «Окружность», — 4 часа; решение задач по теме «Окружность» — 2 часа.

После окончания повторения темы «Окружность» по предлагаемому планированию заключительного повторения еще четыре часа отводятся для решения задач. В учебнике к каждой главе рекомендуются дополнительные задачи, а в конце каждого класса даны задачи повышенной трудности. Эти задачи как наиболее глубоко и четко отражающие авторскую концепцию уровня сложности и глубины усвоения курса и предлагается использовать для решения на последнем этапе повторения. Итоговую контрольную работу, если таковая не проводится органами образования, учитель может составить сам, в зависимости от уровня подготовки класса и в соответствии с требованиями уровня обязательной подготовки учащихся.

Методические рекомендации

1°. Повторение можно начать с рассмотрения взаимного расположения прямой и окружности. Для этого следует предложить учащимся решить задачу:

Даны прямая *p*, точка *O*, не лежащая на этой прямой, и отрезок *r*. Постройте на прямой такие точки, чтобы расстояние до них от точки *O* было равно *r*. Всегда ли задача имеет решение?

Результат решения этой задачи позволяет сделать вывод о взаимном расположении прямой и окружности (см. таблицу 8 (рис. 79)).

Таблица 8. Взаимное расположение прямой и окружности

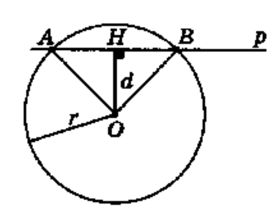
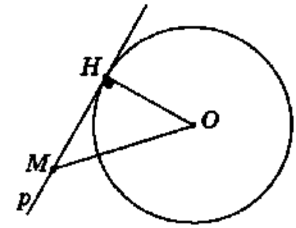
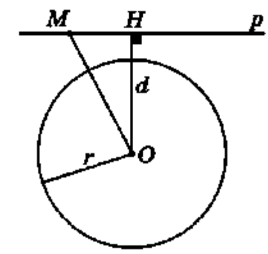
 *Если $d < r$, то прямая и окружность имеют две общие точки.*	 *Если $d = r$, то прямая и окружность имеют одну общую точку.*	 *Если $d > r$, то прямая и окружность не имеют общих точек.*

Рис. 79

В следующих задачах рассматриваются свойства касательных и секущих.

84. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

85. Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна этому радиусу, то она является касательной.

86. Докажите, что отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны.

87. Докажите, что если из одной точки A проведены секущая, которая пересекает окружность в точках B и C (точка B лежит между точками A и C), и касательная AD, то $AB \cdot AC = AD^2$.

88. Из точки A, лежащей вне окружности, проведены две секущие, которые пересекают окружность в точках B_1 и C_1 и B_2 и C_2 (B_1 лежит между точками A и C_1, а B_2 — между A и C_2). Докажите подобие треугольников AB_1C_2 и AB_2C_1.

Первые две задачи являются теоремами, выражающими признак и свойство касательной.

Систематизация знаний учащихся о свойствах хорд проводится через задачи:

89. Докажите, что диаметр окружности, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей.

90. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме, сформулированной в задаче 89.

91. Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Докажите подобие треугольников ADE и CDE.

92. Если две дуги одной окружности равны, то стягивающие их хорды равны и равноудалены от центра окружности.

Решение следующей задачи является следствием решения задачи 92:

93. Докажите, что все хорды данной длины, проведенные в одной окружности, являются касательными некоторой другой окружности.

94. Докажите, что дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.

Полезно также рассмотреть взаимное расположение двух окружностей (таблица 9 (рис. 80)).

Таблица 9. Взаимное расположение двух окружностей

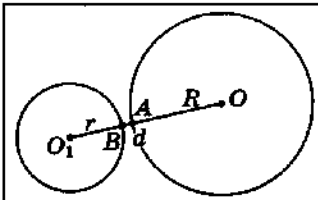
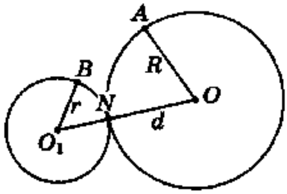
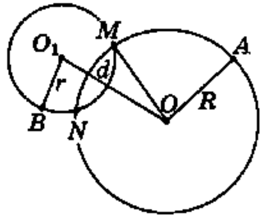
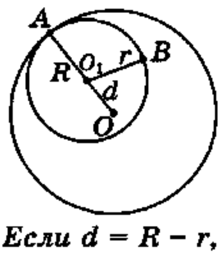
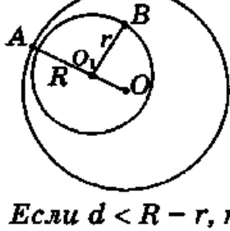
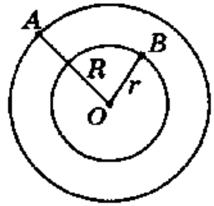
 *Если $d > r + R$, то две окружности не имеют общих точек.*	 *Если $d = r + R$, то две окружности имеют одну общую точку (внешнее касание).*	 *Если $R - r < d < r + R$, то две окружности имеют две общие точки.*
 *Если $d = R - r$, то две окружности имеют одну общую точку (внутреннее касание).*	 *Если $d < R - r$, то две окружности не имеют общих точек.*	 *Если $d = 0$, то окружности концентрические.*

Рис. 80

2°. Для каждого треугольника существует вписанная в него окружность и описанная около него окружность. Полезно обсудить вопрос о существовании и единственности для любой окружности вписанного или описанного около нее треугольника.

95. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и только одну.

96. На рисунке изображена окружность, но ее центр не отмечен. Постройте ее центр.

97. Докажите, что точка пересечения двух биссектрис треугольника является центром вписанной окружности.

98. Найдите центр окружности, описанной около треугольника с вершинами (0; 0), (1; 2), (2; 1).

Систематизацию знаний учащихся по теме «Вписанные и описанные многоугольники» можно провести в ходе решения следующих задач:

99. Правильные одноименные многоугольники подобны, и их стороны относятся как радиусы вписанной или описанной окружностей.

100. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Докажите, что около четырехугольника можно описать окружность, если $AM \cdot CM = BM \cdot DM$.

101. Из точки окружности A проведены диаметр AC и равные хорды AB и AD. Докажите, что диагональ AC четырехугольника $ABCD$ является биссектрисой его углов A и C.

3°. Систематизируя знания о центральных и вписанных углах, можно предложить учащимся найти градусную меру углов, образованных хордами, секущими и касательными:

102. Через данную точку проведите касательную к данной окружности.

103. Докажите, что градусная мера угла, вершина которого лежит внутри круга, равна полусумме градусных мер дуг, из которых одна заключена между его сторонами, а другая между их продолжениями.

104. Докажите, что градусная мера угла, вершина которого лежит вне круга, равна полуразности градусных мер дуг, заключенных между его сторонами.

105. Докажите, что градусная мера угла, сторонами которого являются хорда и касательная, равна половине градусной меры дуги, стягиваемой данной хордой.

106. Докажите, что градусная мера угла, образованного двумя касательными, равна полуразности градусных мер дуг, заключенных между точками касания.

107. Из конца диаметра AB проведена хорда AC, которая делит полуокружность на дуги, градусные меры которых относятся как 3:2. Вычислите величины углов треугольника ABC.

108. Точки A, B и C лежат на окружности. Чему равна хорда AC, если угол ABC равен 30°, а диаметр окружности 10 см?

4°. Для индивидуальной работы можно предложить технически более сложные задачи:

109. Середины сторон правильного шестиугольника соединены последовательно. Докажите, что полученный шестиугольник тоже правильный. Вычислите стороны полученного шестиугольника, если сторона первоначального шестиугольника равна a.

110. Общая хорда двух пересекающихся окружностей, равная a, служит для одной окружности стороной правильного вписанного треугольника, а для другой — правильного вписанного четырехугольника. Определите расстояние между центрами окружностей.

111. Около правильного треугольника со стороной a описана окружность, около этой окружности описан квадрат, а около него — снова окружность. Определите радиус окружности, описанной около квадрата.

112. В окружность радиуса R вписан правильный треугольник, в который вписана окружность, а в эту окружность вписан квадрат. Найдите сторону квадрата.

5°. При повторении тем «Длина окружности» и «Площадь круга» полезно решить задачи по готовому чертежу.

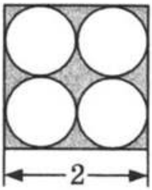


Рис. 81

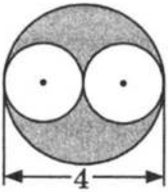


Рис. 82

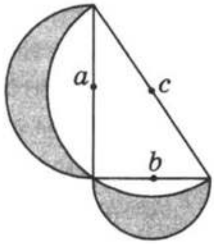


Рис. 83

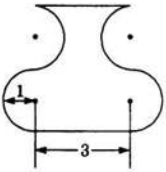


Рис. 84

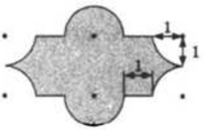


Рис. 85

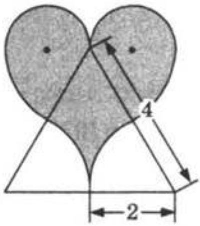


Рис. 86

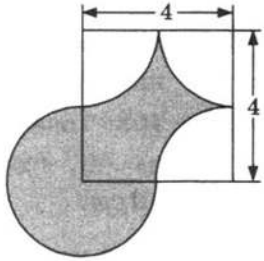


Рис. 87

113. Найдите длину границы и площадь заштрихованной фигуры, если на рисунках изображены окружности и части окружностей (рис. 81–87).

При обсуждении решения задачи по рисунку 87 полезно обратить внимание учащихся на равновеликость заштрихованной фигуры и квадрата.

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Глава X. Метод координат (8 ч.)

1.	Координаты вектора	1 ч.
2.	Простейшие задачи в координатах	1 ч.
3.	Уравнения прямой и окружности	2 ч.
4.	Систематизация и обобщение знаний	1 ч.
5.	Контрольная работа	1 ч.
6.	Резерв	2 ч.

Глава XI. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов (14 ч.)

1.	Синус, косинус, тангенс, котангенс угла	1 ч.
2.	Соотношения между сторонами и углами треугольника	5 ч.
3.	Скалярное произведение векторов	2 ч.
4.	Систематизация и обобщение знаний	1 ч.
5.	Контрольная работа	1 ч.
6.	Резерв	4 ч.

Глава XII. Длина окружности и площадь круга (10 ч.)

1.	Правильные многоугольники	3 ч.
2.	Длина окружности и площадь круга	3 ч.
3.	Систематизация и обобщение знаний	1 ч.
4.	Контрольная работа	1 ч.
5.	Резерв	3 ч.

Глава XIII. Движения (10 ч.)

1.	Понятие движения	2 ч.
2.	Параллельный перенос и поворот	4 ч.
3.	Систематизация и обобщение знаний	1 ч.
4.	Контрольная работа	1 ч.
5.	Резерв	2 ч.

Обобщающее повторение курса планиметрии (24 ч.)

	Повторение темы «Треугольники»	10 ч.
	Повторение темы «Многоугольники»	4 ч.
	Повторение темы «Окружность»	2 ч.
	Контрольная работа	1 ч.
	Подведение итогов	1 ч.

Справочное издание

Мищенко Татьяна Михайловна

Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии

9 класс

к учебнику Л. С. Атанасяна и др.
«Геометрия. 7–9 классы»

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU.ПЩ01.Н00199 от 19.05.2016 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *О. Ю. Казанаева, И. А. Огнева*
Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*
Компьютерная верстка *А. С. Федотова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8(495)641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры,
литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь, www.pareto-print.ru

По вопросам реализации обращаться по тел.:
8(495)641-00-30 (многоканальный).